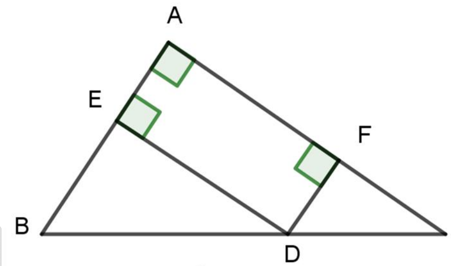
B.MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ điểm D trên cạnh huyền BC kẻ DE vuông góc với AB và DF vuông góc với AC. Chứng minh hệ thức : $EA.EB + FA.FC = DB.DC$

Giải



HÌNH 3.39

Tứ giác AEDF có ba góc vuông $\left(\hat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^0\right)$

nên là hình chữ nhật $\Rightarrow DE = FA, DF = EA$

Do $DE \parallel CA$ (vì cùng vuông góc với AB) nên :

$\Delta EBD \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{DB}{BC}\ hay\ \frac{EB}{AB} = \frac{FA}{AC} = \dots$

Tương tự ta có

$\Delta FDC \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{DC}{BC}\ hay\ \frac{EA}{AB} = \frac{FC}{AC} = \dots$

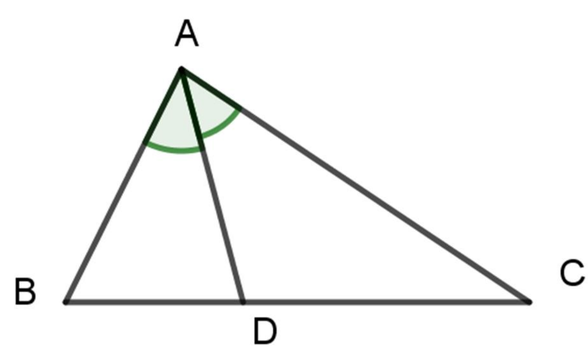
Suy ra $\frac{EA.EB}{AB^2} = \frac{FA.FC}{AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}\ hay\ \frac{EA.EB + FA.FC}{AB^2 + AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$

Theo định lí Pytago trong tam giác vuông ABC vuông tại A: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

do đó $EA.EB + FA.FC = DB.DC$

Ví dụ 2 . Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 80^0, \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB + AC}$. Chứng minh rằng $\widehat{B} = 60^0$

Giải



HÌNH 3.40

Vẽ AD là đường phân giác của góc BAC của tam giác ABC.

Ta có

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC}$

mà $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB + AC}(gt)$, do đó $\frac{DB}{AB} = \frac{AB}{BC}$

Xét ΔBAD và ΔBCA có $\widehat{B}(chung)$ và $\frac{DB}{AB} = \frac{AB}{BC}$

Do đó $\Delta BAD \backsim \Delta BCA(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BCA}.$ Mà $\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 40^0$ nên $\widehat{BCA} = 40^0$

Tam giác ABC có

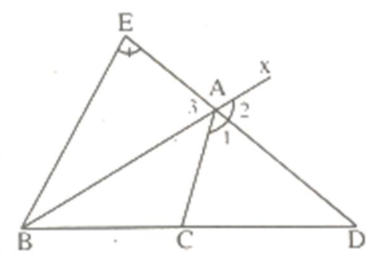
$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^0 \Rightarrow 80^0 + \widehat{ABC} + 40^0 = 180^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 180^0 - 80^0 - 40^0 = 60^0$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, AD là đường phân giác ngoài. Chứng minh rằng :

$$AD^2 = DB.DC - AB.AC$$

Giải

Trên tia DA lấy điểm E, sao cho $\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$



Hình 3.41

Ta có $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (vì AD là tia phân giác của $\widehat{CAx}, \hat{A}_3 = \hat{A}_2$

(đối đỉnh)

Do đó $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3$

Xét ΔABE và ΔADC có : $\hat{A}_3 = \hat{A}_1 = \widehat{ACD}$

Do đó

$\Delta ABE \backsim \Delta ADC(g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE$

$\Rightarrow AB.AC = AD(DE - AD) = AD.DE - AD^2$

ΔACD và ΔBED có : $\widehat{ACD} = \widehat{BED}, \widehat{ADC}(chung) \Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta BED(g.g)$

$\Rightarrow \frac{DC}{DE} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow AD.DE = DC.DB$

Vậy $AB.AC = DB.DC - AD^2 \Rightarrow AD^2 = DB.DC - AB.AC$

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $AB.CD + BC.AD \geq AC.BD$

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ CD có chứa A, vẽ Dx sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{BAC}$.

Vẽ tia Cy sao cho $\widehat{DCy} = \widehat{ACB}$. Gọi I là giao điểm của Dx và Cy.

$\Delta IDC \backsim \Delta BAC(g.g) \Rightarrow \frac{ID}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{IC}{BC} \Rightarrow AC.ID = AB.CD$ và $\frac{IC}{CD} = \frac{BC}{AC}$

$\Delta IBC \backsim \Delta DAC\left(c.g.c\right) \Rightarrow \dfrac{IB}{AD} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow AC.IB = BC.AD$

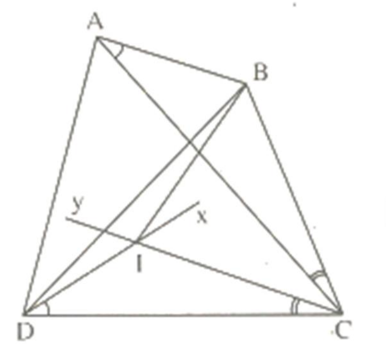
Mà $IB + ID \geq BD$

Do vậy

$AC.BD \leq AC\left(IB + ID\right) = AC.IB + AC.ID = AB.CD + BC.AI$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi I nằm giữa B và D

$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$



Hình 3.42

Ghi chú: Bất đẳng thức vừa chứng minh có tên là bất đẳng thức Ptô-lê-mê

Ví dụ 5. Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng các tam giác cân ABM, BCN, CAP có các góc ở đỉnh lần lượt là $AMB = \alpha, BNC = \beta, APC = \gamma$ thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma = 360^0$. Chứng minh rằng tam giác MNP có số đo ba góc là $\dfrac{\alpha}{2}; \dfrac{\beta}{2}; \dfrac{\gamma}{2}$

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ NC không chứa B dựng điểm E sao cho $\widehat{CNE} = \widehat{APC}, NE = NC$

Khi đó $NB = NC = NE$. Gọi Nx là tia đối của NE

Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BEN} + \widehat{NEC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BNx} + \dfrac{1}{2}\widehat{CNx} = \dfrac{1}{2}\widehat{BNC}$

Vì $\widehat{BNC} + \widehat{CNE} + \widehat{BNE} = 360^0, \widehat{AMB} + \widehat{BNC} + \widehat{APC} = 360^0$

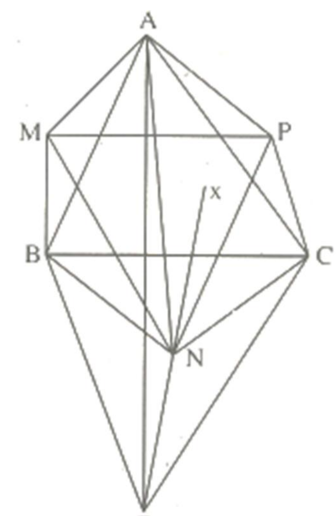
$\widehat{CNE} = \widehat{APC}$ nên $\widehat{AMB} = \widehat{BNE}$

$\Delta MBA \backsim \Delta NBE$ (hai tam giác cân có $\widehat{AMB} = \widehat{BNE}$)

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BN} = \dfrac{BA}{BE}, \widehat{MBA} = \widehat{NBE}$

Ta lại có $\widehat{MBN} = \widehat{MBA} + \widehat{ABN} = \widehat{NBE} + \widehat{ABN} = \widehat{ABE}$

$\dfrac{BM}{BN} = \dfrac{BA}{BE} \Rightarrow \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BN}{BE} \Rightarrow \Delta BMN \backsim \Delta BAE \Rightarrow \widehat{BNM} = \widehat{BEA}$



Hình 3.43

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{CNP} = \widehat{CEA}$

Do đó $\widehat{BEA}+\widehat{CEA}=\widehat{BNM}+\widehat{CNP}$ và $\widehat{BEC}=\frac{1}{2}\widehat{BNC}\Rightarrow\widehat{PNM}=\frac{1}{2}\widehat{BNC}=\frac{\beta}{2}$

Chứng minh tương tự có $\widehat{PMN}=\frac{\alpha}{2},\widehat{MPN}=\frac{\gamma}{2}$