2. Phương pháp phản chứng

Nội dung của phương pháp là: Để chứng minh một khẳng định là đúng ta giả sử ngược lại khẳng định đó sai. Sau đó bằng suy luận và các kết quả đã biết ta đưa đến một điều mâu thuẫn. Để không xảy ra điều mâu thuẫn này thì điều giả sử là sai, tức là khẳng định ban đầu là đúng.

Ví dụ 25 Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3=x-y$. Chứng minh rằng : $x^2+y^2<1$

(Đề thi vào 10 chuyên Chu Văn An và Hà Nội – Amsterdam,1994)

Giải

Từ giả thiết ta có $x>y>0$

Giả sử $x^2+y^2\ge 1, ta\,có: x^3+y^3=x-y\le(x-y)(x^2+y^2)$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3\le x^3+xy^2-x^2y-y^3$$

$$\Leftrightarrow xy^2-x^2y-2y^3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy(y-x)+(-2y^3)\ge 0\text{ vô lí, vì } y-x<0 \text{ và } -2y^3<0$$

Điều vô lí này chứng tỏ giả sử ban đầu là sai.

Vậy $x^2+y^2<1$

Ví dụ 26. Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases}-1\le x+y\le 1 & (1)\\ -1\le x+y+xy\le 1 & (2)\end{cases}$$

Chứng minh rằng : $|x|\le 2, |y|\le 2$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, ĐH KHTN – ĐHQG HN, 2000)

Giải

Vì vai trò của x và y là như nhau nên ta chỉ cần chứng minh $|x|\le 2$, việc chứng minh $|y|\le 2$ được thực hiện tương tự.

Giả sử phản chứng rằng $|x|>2$, ta có:

- Nếu x > 2 thì từ (1)ta có : $y\le 1-x<-1\Rightarrow xy<-2$
- Nếu x < -2 thì từ (1)ta có : $y\le -1-x>1\Rightarrow xy<-2$

Do vậy nếu $|x|>2$ thì $xy<-2$ mặt khác , $x+y\le 1$ nên suy ra $x+y+xy<-1$: mâu thuẫn với (2)

Mâu thuẫn đó chứng tỏ điều giả sử là sai, tức là phải có $|x|\le 2$ (đpcm)

3. Sử dụng bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

Cơ sở của phương pháp này là hai bất đẳng thức sau :

i) $|x|\ge 0, \forall x$ và $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

ii) $|x+y|\le |x|+|y|, \forall x, y$ và $|x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow xy\ge 0$

Ví dụ 27. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\dfrac{21|4x+6|+33}{3|4x+6|+5}$

Giải

Ta có : $P=\dfrac{(21|4x+6|+35)-2}{3|4x+6|+5}=7-\dfrac{2}{3|4x+6|+5}$

$Vì\, 3|4x+6|+5\ge 5, \forall x\, nên \dfrac{2}{3|4x+6|+5}\le \dfrac{2}{5}, \forall x$

$\Rightarrow -\dfrac{2}{3|4x+6|+5}\ge \dfrac{2}{5}, \forall x \Rightarrow 7-\dfrac{2}{3|4x+6|+5}\ge 7-\dfrac{2}{5}, \forall x\, hay\, P\ge \dfrac{33}{5}, \forall x$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{33}{5}\, khi |4x+6|=0\, hay\, x=-\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 28. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=-3|x-4|+8-3x$

Giải

Ta có $|x-4|=\begin{cases} x-4 & nếu\ x\ge 4 \\ -x+4 & nếu\ x<4 \end{cases}$

- Nếu $x\ge 4$ thì $Q=-3(x-4)+8-3x=-6x+20$

  Mặt khác, vì $x\ge 4$ nên $-6x\le -24 \Rightarrow -6x+20\le -24+20\, hay\, Q\le -4$

- Nếu x < 4 thì $Q=-3(-x+4)+8-3x=-4$

  Kết hợp hai trường hợp ta có $Q\le -4$ với mọi x.

  Vậy $Q_{max}=-4\, khi\, x=4$

Ví dụ 29. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = |3x-7| + |3x+2| + 8$$

Giải

Ta có $|3x-7| + |3x+2| = |-3x+7| + |3x+2| \ge |(-3x+7) + (3x+2)| = 9, \forall x$

Do đó $M \ge 9 + 8 = 17, \forall x$

Vậy $M_{\min} = 17\, khi\, (-3x+7)(3x+2) \ge 0 \Leftrightarrow (3x-7)(3x+2) \le 0$

Mà $3x-7 < 3x+2\, nên\, 3x-7 \le 0 \le 3x+2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{3}$