B.MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1.Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt các cạnh BC, CA, AB tại N, P, Q. Gọi R là giao điểm của PQ và BC. Chứng minh rằng $\frac{NB}{NC}=\frac{RB}{RC}$

Giải

Xét tam giác ABC có các đường thẳng AN, BP, CQ đồng quy nên theo định lí Xê va có:

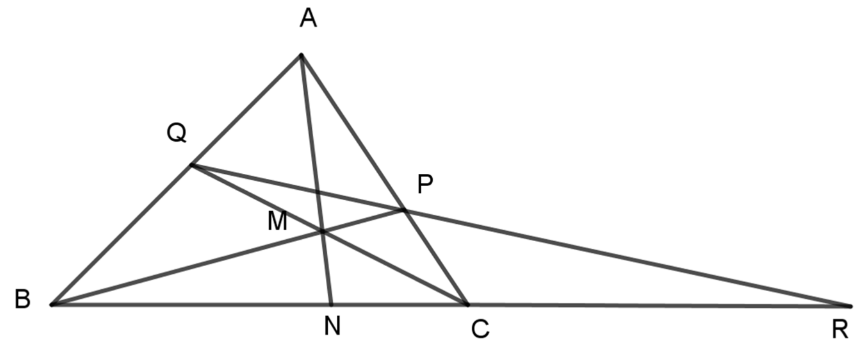
$$\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}.\frac{QA}{QB}=1 \qquad (1)$$

xét ΔABC có P, Q, R thẳng hàng nên theo định lí Mê-nê-la-uýt ta có:

$$\frac{RB}{RC}.\frac{PC}{PA}.\frac{QA}{QB}=1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{NB}{NC}=\frac{RB}{RC}$$



HÌNH 3.46

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài ΔABC dựng ΔBCO vuông cân ở O. AB cắt CO ở E, AC cắt BO ở F. Kẻ $EN \parallel FM$ (N thuộc AC và M thuộc tia AB). MN cắt BC ở Q. Chứng minh AO vuông góc với OQ.

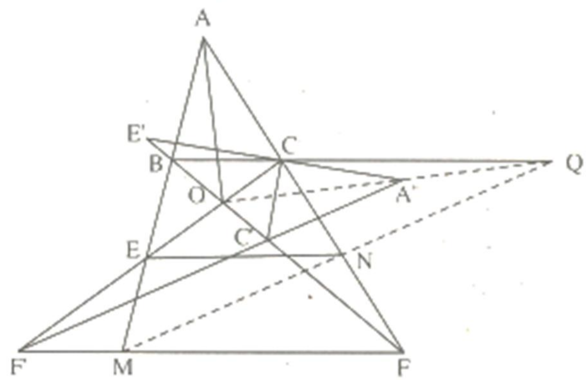
Giải

Lấy C' đối xứng với B qua O, E' thuộc tia OB sao cho OE' = OE, F' thuộc tia đối của OC sao cho OF' = OF. E'C cắt F'C' ở A'. Ta chứng minh OA vuông góc và bằng OA'.

Thật vậy, dễ thấy :

$BE = E'C\left(\Delta OEB = \Delta OE'C\right)$
$\Rightarrow \Delta BEC = \Delta CE'C'\left(c.c.c\right)$
$\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{E'CC'}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'CC'}$ (tính chất kề bù)



Hình 3.47

Tương tự $CF = C'F'\left(\Delta OCF = \Delta OC'F'\right)$

$\Rightarrow \Delta BCF = \Delta CC'F'\left(c.c.c\right) \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{CC'F'}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'C'C}$ (tính chất kề bù)

Vậy

$\Delta ABC = \Delta A'CC'\left(g.c.g\right)$
$\Rightarrow \Delta OBA = \Delta OCA'\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'OC} \Rightarrow OA \perp OA'$(Vì OB vuông góc với OC)
Ta cần chứng minh ba đường thẳng BC, OA' và MN đồng quy.
Đặt $OB = OC = x, OE = OE' = y$. Gọi Q là giao điểm của OA' và BC. Áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt
Cho tam giác E'BC với cát tuyến OA'Q, ta được:

$$\frac{QC}{QB}.\frac{x}{y}.\frac{A'E'}{A'C} = 1 \qquad (1)$$

Từ các kết quả trên suy ra

$$AC' = AB, A'E' = AE \text{ và } \frac{A'E'}{A'C} = \frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{QC}{QB}.\frac{x}{y}.\frac{AN}{AC} = 1 \qquad (3)$

Gọi Q' là giao điểm của MN với BC. Áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt trong tam giác ABC với cát tuyến MNQ', ta có: $\frac{Q'C}{Q'B}.\frac{MA}{MB}.\frac{NA}{NC} = \frac{Q'C}{Q'B}.\frac{FC}{FA}.\frac{NA}{NC} \qquad (4)$

Áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt trong tam giác AEC với cát tuyến FOB, ta suy ra

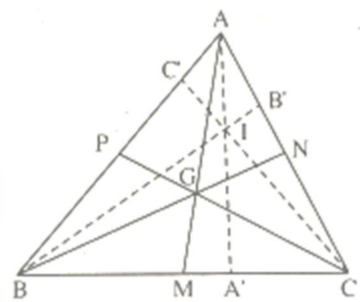
$\frac{FC}{FA}=\frac{BE}{BA}.\frac{x}{y}=\frac{CN}{CA}.\frac{x}{y}$ đem thế vào (4) ta có $\frac{Q'C}{Q'B}.\frac{x}{y}.\frac{AN}{AC}=1$ (5)

Từ (3) và (5) suy ra Q trùng với Q', kết thúc chứng minh.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC, I là điểm nằm trong tam giác. Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, AC, AB tại A', B' và C'. Xác định vị trí của I để tích $AB'.CA'.BC'$ có giá trị lớn nhất.

Giải

Kẻ AM, CP, BN là ba đường trung tuyến của tam giac ABC cắt nhau tại G.



Hình 3.48

Ta có : $AB'.B'C\le\left(\frac{AB'+B'C}{2}\right)^2=AN^2$

Tương tự $CA'.A'B\le CM^2;BC'.C'A\le BP^2$

Suy ra :

$\left(AB'.CA'.BC'\right)\left(B'C.A'B.C'A\right)\le\left(AN.CM.BP\right)^2$

Theo định lí Cêva ta có