B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG** $ax+b<0$**.**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình sau.

a) $mx+6\le 2x+3m$ b) $x+m \;\; m+x>3x+4$

c) $m^2+9 \;\; x+3\ge m \;\; 1-6x$ d) $m \;\; m^2x+2 \;\; < x+m^2+1$

Lời giải

a) Bất phương trình tương đương với $\;\; m-2 \;\; x<3m-6$

Với $m=2$ bất phương trình trở thành $0x\le 0$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $m>2$ bât phương trình tương đương với $x<\dfrac{3m-6}{m-2}=3$

Với $m<2$ bât phương trình tương đương với $x>\dfrac{3m-6}{m-2}=3$

Kết luận

$m=2$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x (có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}$).

$m>2$ bât phương trình có nghiệm là $x<3$ (có tập nghiệm là $S=\;\; -\infty;3 \;\;$)

$m<2$ bât phương trình có nghiệm là $x>3$ (có tập nghiệm là $S=\;\; 3;+\infty \;\;$)

b) Bất phương trình tương đương với $\;\; m-2 \;\; x>4-m^2$

Với $m=2$ bất phương trình trở thành $0x>0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Với $m>2$ bât phương trình tương đương với $x>\dfrac{4-m^2}{m-2}=-m-2$

Với $m<2$ bât phương trình tương đương với $x<\dfrac{4-m^2}{m-2}=-m-2$

Kết luận

$m=2$ bất phương trình vô nghiệm

$m>2$ bât phương trình có nghiệm là $x>-m-2$

$m<2$ bât phương trình có nghiệm là $x<-m-2$

c) Bất phương trình tương đương với $\;\; m+3 \;\;^2 x\ge m-3$

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x\ge -6$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $m\ne -3$ bât phương trình tương đương với $x\ge\dfrac{m-3}{m+3 \;\;^2}$

Kết luận

$m=-3$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

$m\ne -3$ bât phương trình có nghiệm là $x\ge\dfrac{m-3}{m+3 \;\;^2}$.

d) Bất phương trình tương đương với $\Leftrightarrow \;\; m^3-1 \;\; x<m^2-2m+1$

$\Leftrightarrow \;\; m-1 \;\; x<\dfrac{m-1 \;\;^2}{m^2+m+1}$ (vì $m^2+m+1=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$)

Với $m=1$ bất phương trình trở thành $0x<0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Với $m>1$ bât phương trình tương đương với $x<\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

Với $m < 1$ bât phương trình tương đương với $x > \dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

Kết luận

$m = 2$ bất phương trình vô nghiệm

$m > 1$ bât phương trình có nghiệm là $x < \dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

$m < 1$ bât phương trình có nghiệm là $x > \dfrac{m-1}{m^2+m+1}$.

Ví dụ 2. Tìm m để bất phương trình $m^2 - m \;\; x + m < 6x - 2$ vô nghiệm.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $m^2 - m - 6 \;\; x < -2 - m$

Rõ ràng nếu $m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 3 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = -2$ bất phương trình trở thành $0x < 0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $m = 3$ bất phương trình trở thành $0x < -5$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Vậy giá trị cần tìm là $m = -2$ và $m = 3$.

Ví dụ 3. Tìm m để bất phương trình $4m^2 \;\; 2x - 1 \;\; \geq \;\; 4m^2 + 5m + 9 \;\; x - 12m$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $4m^2 - 5m - 9 \;\; x \geq 4m^2 - 12m$

Dễ dàng thấy nếu $4m^2 - 5m - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \dfrac{9}{4} \end{cases}$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $m = -1$ bất phương trình trở thành $0x \geq 16$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $m = \dfrac{9}{4}$ bât phương trình trở thành $0x \geq -\dfrac{27}{4}$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \dfrac{9}{4}$.

Ví dụ 4. Tìm m để bất phương trình $4m^2 + 2m + 1 \;\; x - 5m \geq 3x - m - 1$ có tập nghiệm là $[-1;+\infty)$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $4m^2 + 2m - 2 \;\; x \geq 4m - 1 \Leftrightarrow \;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; x \geq 4m - 1$

Với $m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$ thì bất phương trình vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi x do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > \dfrac{1}{4} \Rightarrow \;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; > 0$ bất phương trình tương đương với $x \geq \dfrac{1}{m+2}$

Do đó để bất phương trình có tập nghiệm là $[-1;+\infty)$ thì $\dfrac{1}{m+2}=-1 \Leftrightarrow m=-3$ (không thỏa mãn)

Với $-2<m<\dfrac{1}{4} \Rightarrow \;\; m+2 \quad 4m-1 \;\; <0$ bất phương trình tương đương với $x \le \dfrac{1}{m+2}$ suy ra $-2<m<\dfrac{1}{4}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m<-2 \Rightarrow \;\; m+2 \quad 4m-1 \;\; >0$ bất phương trình tương đương với $x \ge \dfrac{1}{m+2}$

Do đó để bất phương trình có tập nghiệm là $[-1;+\infty)$ thì $\dfrac{1}{m+2}=-1 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn)

Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương

$m-1 \;\; x+2m-3 \ge 0\,(1)$ và $\;\; m+1 \;\; x+m-4 \ge 0\,(2)$.

Lời giải

* Với $m=1$ bất phương trình (1) trở thành $0.x-1 \ge 0$ (vô nghiệm), bất phương trình (2) trở thành $2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{3}{2}$ do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m=-1$ bất phương trình (1) trở thành $-2x-5 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\dfrac{5}{2}$, bất phương trình (2) trở thành $0.x-5 \ge 0$ (nghiệm đúng với mọi x) do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m>1$ ta có $\;1\; \Leftrightarrow x \ge \dfrac{3-2m}{m-1}$, $\;2\; \Leftrightarrow x \ge \dfrac{4-m}{m+1}$

Suy ra hai bất phương trình tương đương $\Leftrightarrow \dfrac{3-2m}{m-1}=\dfrac{4-m}{m+1}$

$\Leftrightarrow m^2+4m-7=0 \Leftrightarrow m=-2 \pm \sqrt{11}$

Đối chiếu với điều kiện $m>1$ suy ra $m=-2+\sqrt{11}$.

* Với $-1<m<1$ ta có $\;1\; \Leftrightarrow x \le \dfrac{3-2m}{m-1}$, $\;2\; \Leftrightarrow x \ge \dfrac{4-m}{m+1}$ do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m<-1$ ta có $\;1\; \Leftrightarrow x \le \dfrac{3-2m}{m-1}$, $\;2\; \Leftrightarrow x \le \dfrac{4-m}{m+1}$

Suy ra hai bất phương trình tương đương $\Leftrightarrow \dfrac{3-2m}{m-1}=\dfrac{4-m}{m+1}$

$\Leftrightarrow m^2+4m-7=0 \Leftrightarrow m=-2 \pm \sqrt{11}$

Đối chiếu với điều kiện $m<-1$ suy ra $m=-2-\sqrt{11}$

Vậy hai bất phương trình tương đương khi $m=-2 \pm \sqrt{11}$.

2. Các bài tập luyện tập.

Bài 4.66: Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $m(x-m) \le x-1$.   b) $3x+m^2 \ge m(x+3)$.

Bài 4.67: a) Tìm m để bất phương trình $mx-2 \le x-m$ vô nghiệm.

b) Tìm m để bất phương trình $m^2 \;\; x-1 \;\; \ge 9x+3m$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 4.68: Cho hàm số $f\ \ x\ \ =\ \ 2m+1\ \ x-3m+2$.

a) Tìm m để phương trình $f\ \ x\ \ =0$ có nghiệm $x\in\left[0;1\right]$.

b) Tìm m để $f\ \ x\ \ \geq 0$ với mọi $x\in\left[-1;2\right]$.

Bài 4.69: Tìm m để bất phương trình $m\ \ 2x-1\ \ \geq 2x+1$ có tập nghiệm là $[1;+\infty)$.

Bài 4.70: Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương

$2-m\ \ x+2m+4\geq 0$ và $\ m+1\ \ x+m^2-4\geq 0$.