B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN.**

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức(BĐT) $A \geq B$ ta có thể sử dụng các cách sau:

- Ta đi chứng minh $A - B \geq 0$. Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A - B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.
- Xuất phát từ BĐT đúng, biến đổi tương đương về BĐT cần chứng minh.

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Biến đổi tương đương về bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 1 : Cho hai số thực a, b, c. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau

a) $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ b) $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

c) $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq \left(a+b+c\right)^2$ d) $\left(a+b+c\right)^2 \geq 3\left(ab+bc+ca\right)$

Lời giải

a) Ta có $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$. Đẳng thức $\Leftrightarrow a = b$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

c) BĐT tương đương $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

d) BĐT tương đương $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3\left(ab+bc+ca\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) - 2\left(ab+bc+ca\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Nhận xét: Các BĐT trên được vận dụng nhiều, và được xem như là "bổ đề" trong chứng minh các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 2 : Cho năm số thực a, b, c, d, e. Chứng minh rằng

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.

Lời giải

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) =$

$= (\dfrac{a^2}{4} - ab + b^2) + (\dfrac{a^2}{4} - ac + c^2) + (\dfrac{a^2}{4} - ad + d^2) + (\dfrac{a^2}{4} - ae + e^2)$

$= (\dfrac{a}{2} - b)^2 + (\dfrac{a}{2} - c)^2 + (\dfrac{a}{2} - d)^2 + (\dfrac{a}{2} - e)^2 \geq 0 \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c = d = e = \dfrac{a}{2}$.

Ví dụ 3 : Cho $ab \geq 1$. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1} \geq \dfrac{2}{1+ab}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}-\dfrac{2}{1+ab}=(\dfrac{1}{a^2+1}-\dfrac{1}{1+ab})+(\dfrac{1}{b^2+1}-\dfrac{2}{1+ab})$

$=\dfrac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)}+\dfrac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)}=\dfrac{a-b}{1+ab}(\dfrac{b}{1+b^2}-\dfrac{a}{1+a^2})=\dfrac{a-b}{1+ab}.\dfrac{b-a+a^2b-b^2a}{(1+b^2)(1+a^2)}$

$=\dfrac{a-b}{1+ab}\dfrac{(a-b)(ab-1)}{(1+b^2)(1+a^2)}=\dfrac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+b^2)(1+a^2)}\geq 0$ (Do $ab\geq 1$).

Nhận xét : Nếu $-1<b\leq 1$ thì BĐT có chiều ngược lại : $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}\leq\dfrac{2}{1+ab}$.

Ví dụ 4: Cho số thực x. Chứng minh rằng

a) $x^4+3\geq 4x$ b) $x^4+5>x^2+4x$ c) $x^{12}+x^4+1>x^9+x$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với $x^4-4x+3\geq 0$

$\Leftrightarrow(x-1)(x^3+x^2+x-3)\geq 0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^2+2x+3)\geq 0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2\left[(x+1)^2+1\right]\geq 0$ (đúng với mọi số thực x)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $x^4-x^2-4x+5>0$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1+x^2-4x+4>0\Leftrightarrow(x^2-1)^2+(x-2)^2>0$

Ta có $(x^2-1)^2\geq 0,(x-2)^2\geq 0\Rightarrow(x^2-1)^2+(x-2)^2\geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-1=0\\x-2=0\end{cases}$ (không xảy ra)

Suy ra $(x^2-1)^2+(x-2)^2>0$ ĐPCM.

c) Bất đẳng thức tương đương với $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$

+ Với $x<1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^{12}+x^4(1-x^5)+(1-x)$

Vì $x<1$ nên $1-x>0,1-x^5>0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

+ Với $x\geq 1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1$

Vì $x\geq 1$ nên $x^3-1\geq 0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

Vậy ta có $x^{12}+x^4+1>x^9+x$.

Ví dụ 5: Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

a) $a^4+b^4-4ab+2\geq 0$

b) $2\ \ a^4+1\ \ +\ \ b^2+1\ ^2\geq 2\ \ ab+1\ ^2$

c) $3\ \ a^2+b^2\ \ -ab+4\geq 2\ \ a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}$

Lời giải

a) BĐT tương đương với $\ \ a^4+b^4-2a^2b^2\ \ +\ \ 2a^2b^2-4ab+2\ \ \geq 0$

$\Leftrightarrow\ \ a^2-b^2\ ^2+2\ \ ab-1\ ^2\geq 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\pm 1$.

b) BĐT tương đương với $2\ \ a^4+1\ \ +\ \ b^4+2b^2+1\ \ -2\ \ a^2b^2+2ab+1\ \ \geq 0$

$\Leftrightarrow \ (a^4+b^4-2a^2b^2) + (2a^2-4ab+2b^2) + (a^4-4a^2+1) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+2(a-b)^2+(a^2-1)^2 \ge 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\pm 1$.

c) BĐT tương đương với $6(a^2+b^2)-2ab+8-4\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[a^2-4a\sqrt{b^2+1}+4(b^2+1)\right]+\left[b^2-4b\sqrt{a^2+1}+4(a^2+1)\right]+(a^2-2ab+b^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a-2\sqrt{b^2+1}\right)^2+\left(b-2\sqrt{a^2+1}\right)^2+(a-b)^2\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức không xảy ra.

Ví dụ 6: Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $x\ge y$. Chứng minh rằng;

a) $4(x^3-y^3) \ \ge \ (x-y)^3$

b) $x^3-3x+4\ge y^3-3y$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương $4(x-y)(x^2+xy+y^2) - (x-y)^3\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[4(x^2+xy+y^2)-(x-y)^2\right]\ge 0 \Leftrightarrow (x-y)\left[3x^2+3xy+y^2\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow 3(x-y)\left[\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\right]\ge 0$ (đúng với $x\ge y$) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

b) Bất đẳng thức tương đương $x^3-y^3\ge 3x-3y-4$

Theo câu a) ta có $x^3-y^3\ge \dfrac{1}{4}(x-y)^3$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$\dfrac{1}{4}(x-y)^3\ge 3x-3y-4$ (*), Thật vậy,

BĐT (*) $\Leftrightarrow (x-y)^3-12(x-y)+16\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y-2)\left[(x-y)^2+2(x-y)-8\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y-2)^2(x-y+4)\ge 0$ (đúng với $x\ge y$)

Đẳng thức xảy không xảy ra.

Loại 2: Xuất phát từ một BĐT đúng ta biến đổi đến BĐT cần chứng minh

Đối với loại này thường cho lời giải không được tự nhiên và ta thường sử dụng khi các biến có những ràng buộc đặc biệt

* Chú ý hai mệnh đề sau thường dùng

$a\in[\alpha;\beta]\Rightarrow (a-\alpha)(a-\beta)\le 0 \quad (*)$

$a,b,c\in[\alpha;\beta]\Rightarrow (a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha)+(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)\ge 0 \quad (**)$

Ví dụ 7 : Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

Lời giải

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác nên ta có :

$a+b>c\Rightarrow ac+bc>c^2$. Tương tự

$bc+ba>b^2;\quad ca+cb>c^2$ cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm

Nhận xét : * Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ BĐT đúng đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của BĐT với c.
Ngoài ra nếu xuất phát từ BĐT $|a-b|<c$ rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả.

Ví dụ 8 : Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh : $a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a$

Lời giải

Cách 1: Vì $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2c^2\ge a^2+b^2+c^2$ (*)

Ta có : $a^2b^2c^2\ge 0;\quad a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a^2b+b^2c+c^2a$ nên từ (*) ta suy ra

$a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a$ đpcm.

Cách 2: BĐT cần chứng minh tương đương với $a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\le 1$

Mà $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow a^2\le a, b^2\le b, c^2\le c$ do đó

$a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\le a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)$

Ta chỉ cần chứng minh $a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$

Thật vậy: vì $a,b,c\in[0;1]$ nên theo nhận xét (**) ta có

$$abc+(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a+b+c-(ab+bc+ca)\le 1$$
$$\Leftrightarrow a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$$

vậy BĐT ban đầu được chứng minh

Ví dụ 9 : Cho các số thực a,b,c thỏa mãn : $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh :

$$2(1+a+b+c+ab+bc+ca)+abc\ge 0.$$

Lời giải

Vì $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow a,b,c\in[-1;1]$ nên ta có :

$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc\ge 0$ (*)

Mặt khác : $\dfrac{(1+a+b+c)^2}{2}\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca\ge 0$ (**)

Cộng (*) và (**) ta có đpcm.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng nếu $a\ge 4, b\ge 5, c\ge 6$ và $a^2+b^2+c^2=90$ thì $a+b+c\ge 16$

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $a<9, b<8, c\le 7$ do đó áp dụng (*) ta có

$(a-4)(a-9)\le 0,\ (b-5)(b-8)\le 0,\ (c-6)(c-7)\le 0$ nhân ra và cộng các BĐT cùng chiều lại ta được:

$a^2+b^2+c^2-13(a+b+c)+118\le 0$ suy ra

$a+b+c\ge\dfrac{1}{13}(a^2+b^2+c^2+118)=16$ vì $a^2+b^2+c^2=90$

vậy $a+b+c\ge 16$ dấu "=" xảy ra khi $a=4, b=5, c=7$

Ví dụ 11: Cho ba số $a,\ b,\ c$ thuộc $[-1;1]$ và không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\ge 2$$

Lời giải

Vì ba số a, b, c thuộc $\left[-1;1\right]$ nên $0\le a^2, b^2, c^2\le 1$

Suy ra $(1-b^2)(1+b^2-a^4)\ge 0 \Leftrightarrow a^4+b^4-a^4b^2\le 1$ (*)

Mặt khác $a^4\ge a^{2012}, b^4\ge b^{2012}$ đúng với mọi a, b thuộc $\left[-1;1\right]$

Suy ra $a^4+b^4-a^4b^2\ge a^{2012}+b^{2012}-a^4b^2$ (**)

Từ (*) và (**) ta có $a^{2012}+b^{2012}\le a^4b^2+1$ hay $\dfrac{a^4b^2+c^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\ge 1$

Tương tự ta có $\dfrac{b^4c^2+a^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\ge 1$ và $\dfrac{c^4a^2+b^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\ge 1$

Cộng vế với ta được $\dfrac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\ge 3$

Hay $\dfrac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\ge 2$ ĐPCM.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.0. Cho các số thực a, b, c là số thực. Chứng minh rằng:

a) $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

b) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

c) $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$

d) $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc-ca)$

Bài 4.1: Cho a,b,c,d là số dương.. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$ với $\dfrac{a}{b}<1$.

b) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$

c) $1<\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{c}{c+d+a}+\dfrac{d}{d+a+b}<2$

d) $2<\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{b+c}{b+c+d}+\dfrac{c+d}{c+d+a}+\dfrac{d+a}{d+a+b}<3$

Bài 4.2: Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $(ax+by)(bx+ay)\ge(a+b)^2xy$ (với $a,b>0;\ x,y\in R$).

b) $\dfrac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}}\ge\dfrac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}}$. với $a>b>0;\ c>\sqrt{ab}$.

c) $\dfrac{a+b}{2a-b}+\dfrac{c+b}{2c-b}\ge 4$ với $a,b,c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$

d) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>a^3+b^3+c^3$ với a,b,c là ba cạnh của tam giác

Bài 4.3: Cho $x\ge y\ge z\ge 0$. Chứng minh rằng:

a) $xy^3+yz^3+zx^3\ge xz^3+zy^3+yx^3$

b) $\dfrac{x^2y}{z}+\dfrac{y^2z}{x}+\dfrac{z^2x}{y}\ge\dfrac{x^2z}{y}+\dfrac{y^2x}{z}+\dfrac{z^2y}{x}$.

Bài 4.4: Cho bốn số dương $a,\ b,\ c,\ d$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}.$$

Bài 4.5: Cho $a,b,c \in \left[1;3\right]$ và thoả mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \le 14$