**B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.**

➢ **DẠNG TOÁN 1: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG .**

**1. Các ví dụ minh họa.**

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n$ và $n^3$ chia hết cho 3 thì $n$ chia hết cho 3.

***Lời giải***

Giả sử $n$ không chia hết cho 3 khi đó $n = 3k+1$ hoặc $n = 3k+2$, $k \in Z$

Với $n = 3k+1$ ta có $n^3 = \left(3k+1\right)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$ không chia hết cho ba (mâu thuẫn)

Với $n = 3k+2$ ta có $n^3 = \left(3k+2\right)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 4$ không chia hết cho ba (mâu thuẫn)

Vậy $n$ chia hết cho 3.

**Ví dụ 2:** Cho tam thức $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Chứng minh rằng nếu tồn tại số thực $\alpha$ sao cho $a.f\left(\alpha\right) \le 0$ thì phương trình $f\left(x\right) = 0$ luôn có nghiệm.

***Lời giải***

Ta có $f\left(x\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Giả sử phương trình đã cho vô nghiệm, nghĩa là $\Delta < 0$.

Khi đó ta có: $af\left(x\right) = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra không tồn tại $\alpha$ để $af\left(\alpha\right) \le 0$, trái với giả thiết.

Vậy điều ta giả sử ở trên là sai, hay phương trình đã cho luôn có nghiệm.

**Ví dụ 3:** Cho $a, b, c$ dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng nếu

$a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ thì có một và chỉ một trong ba số $a, b, c$ lớn hơn một.

***Lời giải***

Giả sử ngược lại, khi đó ta có các trường hợp sau:

- TH1: Với ba số đều lớn hơn 1 hoặc ba số đều nhỏ hơn 1 thì mâu thuẫn với giả thiết $abc = 1$
- TH2: Với hai trong ba số lớn hơn 1, không mất tính tổng quát giả sử $a > 1, b > 1$

Vì $abc = 1$ nên $c < 1$ do đó

$\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right) < 0 \Leftrightarrow abc + a + b + c - ab - bc - ca - 1 < 0$

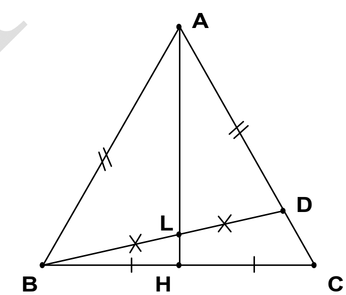
$\Leftrightarrow a + b + c < ab + bc + ca \Leftrightarrow a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (mâu thuẫn)

Vậy chỉ có một và chỉ một trong ba số $a,\ b,\ c$ lớn hơn một.

**Ví dụ 4:** Chứng minh rằng một tam giác có đường trung tuyến vừa là phân giác xuất phát từ một đỉnh là tam giác cân tại đỉnh đó.

***Lời giải***

Giả sử tam giác $ABC$ có $AH$ vừa là đường trung tuyến vừa là đường phân giác và không cân tại A.




Khôngmất tính tổng quát xem như $AC > AB$ .

Trên $AC$ lấy $D$ sao cho $AB = AD$ .

Gọi $L$ là giao điểm của $BD$ và $AH$ .

Khi đó $AB = AD,\ \widehat{BAL} = \widehat{LAD}$ và $AL$ chung nên $\Delta ABL = \Delta ADL$

Do đó $AL = LD$ hay $L$ là trung điểm của $BD$

Suy ra $LH$ là đường trung bình của tam giác $CBD$

$\Rightarrow LH\ //\ DC$ điều này mâu thuẫn vì $LH, DC$ cắt nhau tại $A$

Vậy tam giác $ABC$ cân tại A.

**2. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.14:** Chứng minh bằng phương pháp phản chứng: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm thì a và c cùng dấu.

**Bài 1.15:** Chứng minh bằng phương pháp phản chứng: Nếu hai số nguyên dương có tổng bình phương chia hết cho 3 thì cả hai số đó phải chia hết cho 3.

**Bài 1.16:** Chứng minh rằng : Nếu độ dài các cạnh của tam giác thỏa mãn bất đẳng thức $a^2 + b^2 > 5c^2$ thì c là độ dài cạnh nhỏ nhất của tam giác.

**Bài 1.17:** Cho a, b, c dương nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau sai $a\left(1-b\right) > \frac{1}{4},\ b\left(1-c\right) > \frac{1}{4},\ c\left(1-a\right) > \frac{1}{4}$

**Bài 1.18:** Nếu $a_1a_2 \geq 2\left(b_1 + b_2\right)$ thì ít nhất một trong hai phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0,\ x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có nghiệm.

**Bài 1.19:** Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

**Bài 1.20:** Cho các số $a,\ b,\ c$ thỏa các điều kiện : $\begin{cases} a+b+c>0 & (1) \\ ab+bc+ca>0 & (2) \\ abc>0 & (3) \end{cases}$

Chứng minh rằng cả ba số $a,\ b,\ c$ đều dương.

**Bài 1.21:** Chứng minh bằng phản chứng định lí sau : “Nếu tam giác ABC có các đường phân giác trong BE, CF bằng nhau, thì tam giác ABC cân”.

**Bài 1.22:** Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.