PHÉP NGHỊCH ĐẢO

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Cho điểm O cố định và một số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M khác O thành điểm sao cho M' thuộc đường thẳng OM và $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$ được gọi là phép nghịch đảo cực O, phương tích k.

Kí hiệu phép nghịch đảo cực O, phương tích k là f_O^k.

Vậy $f_O^k(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in OM \\ \overline{OM'}.\overline{OM} = k \end{cases}$.

Khi M tiến lại gần cực nghịch đảo O thì M' tiến càng ra xa O, nghĩa là $M \to O$ thì $f_O^k(M) = M' \to \infty$.

2. Tính chất.

Tính chất 1.

Phép nghịch đảo có tính chất đối hợp, tức $f_O^k(M) = M' \Leftrightarrow f_O^k(M') = M$. (trong chuyên đề này ta dùng kí hiệu f thay cho f_O^k nếu không gây hiểu nhầm)

Tính chất 1 là hiển nhiên vì $f(M) = M' \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{OM'} = k$

$\Leftrightarrow \overline{OM'}.\overline{OM} = k \Leftrightarrow f(M') = M$.

Từ tính chất trên ta có $f^2(M) = f \circ f(M) = f(M') = M \Rightarrow f^2$ là phép đồng nhất.

Nếu $f(M) = M$ thì M được gọi là điểm kép của f.

Tính chất 2.

Nếu $k < 0$ thì hiển nhiên f không có điểm kép .

Nếu $k > 0$ thì tập hợp các điểm kép của f là đường tròn $(O;\sqrt{k})$. Đường tròn này được gọi là đường tròn nghịch đảo của f.

Thật vậy, $f(M) = M \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{OM} = k > 0 \Leftrightarrow OM = \sqrt{k} \Leftrightarrow M \in (O;\sqrt{k})$.

Từ định nghĩa ta thấy ảnh của mọi điểm M thuộc đường thẳng d đi qua cực O là một điểm M' thuộc d vì vậy $f(d) = d$ và ta nói d là đường thẳng kép của f.

Nếu hai đường tròn (C) và (C') có chung điểm A thì góc giữa hai tiếp tuyến của (C) và (C') cắt nhau tại A, B . Gọi d, d' lần lượt là tiếp tuyến của

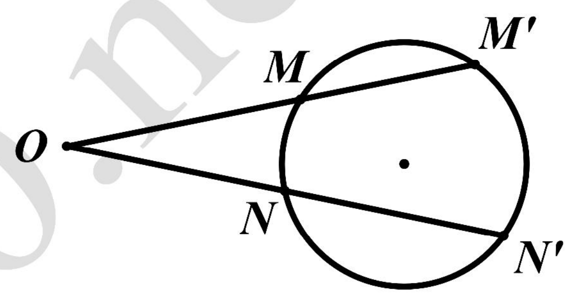
(C) và (C') tại A. Góc giữa hai đường thẳng d và d' được gọi là góc giữa (C) và (C'). Nếu góc giữa hai tiếp tuyến d và d' bằng 90^0 thì ta nói (C) và (C') là hai đường tròn trực giao.

Tính chất 3.

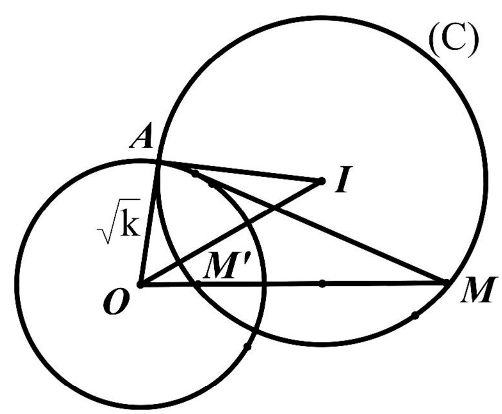
- Nếu $f(M)=M'$ thì mọi đượng tròn đi qua M và M' đều là đường tròn bất biến, nghĩa là $f(C)=C$.
- Nếu $P_{O/(C)}=k$ thì (C) bất biến qua f.
- Nếu đường tròn (C) trực giao với đường tròn $(O,\sqrt{k})$ thì (C) bất biến qua f.

Chứng minh:

- Giả sử $f(M)=M'$ và (C) là đường tròn đi qua M,M'.
  Lấy điểm N bất kì thuộc (C), gọi N' là giao điểm của ON với (C).
  Ta có $\overline{ON}.\overline{ON'}=\overline{OM}.\overline{OM'}=k$
  $\Rightarrow f(N)=N' \Rightarrow (C)$ bất biến.



- $P_{O/(C)}=k$,Lấy M bất kì thuộc (C), gọi
  $M'=f(M) \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{OM'}=k=P_{O/(C)} \Leftrightarrow M'\in(C)$
  $\Rightarrow (C)$ bất biến.
- Vì (C) và $(O;\sqrt{k})$ trực giao nên
  $P_{O/(C)}=\left(\sqrt{k}\right)^2=k$ do đó (C) bất biến.



Tính chất 4.

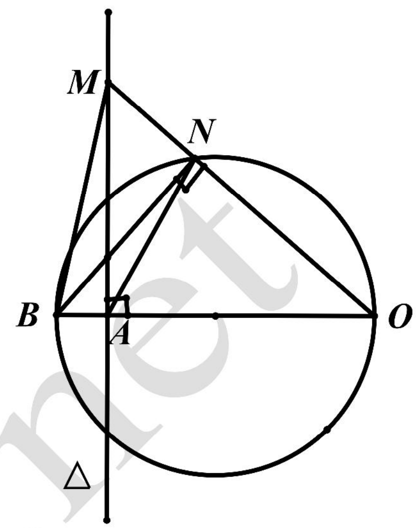
- Ảnh của một đường thẳng đi qua cực biến thành chính nó.
- Ảnh của một đường thẳng không đi qua cực biến thành đường tròn đi qua cực.

Chứng minh:

Ý thứ nhất thì hiển nhiên, đã được chúng ta nhắc tới trong phần mọi đường thẳng qua cực đều là đường thẳng kép. Ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của ý thứ hai.

Gọi A là hình chiếu của O trên Δ, gọi $B = f(A)$.

Lấy điểm $M \in \Delta$, giả sử $N = f(M)$ thì ta có $\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OM}.\overline{ON} = k \Rightarrow A, B, M, N$ cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow BNM = BAM = 90^0$ hay N thuộc đường tròn đường kính OB. Khi M chạy trên Δ thì N chạy trên đường tròn đường kính OB. Vậy ảnh của Δ là đường tròn đường kính OB.



(hình vẽ bên ứng với trường hợp $k > 0$)

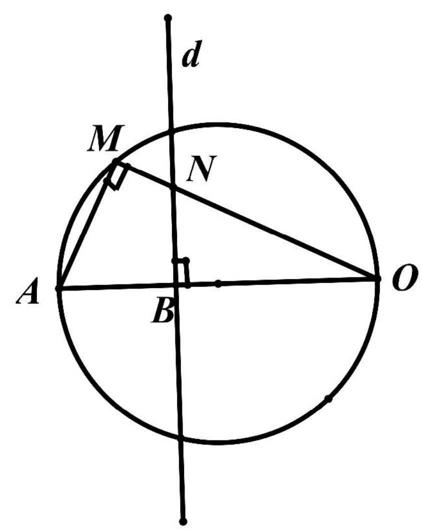
Tính chất 5.

- Ảnh của một đường tròn qua cực là một đường thẳng không qua cực và vuông góc với đường kính xuất phát từ cực của đường tròn đó.
- Ảnh của một đường tròn không qua cực là một đườngtròn.

Chứng minh:

- Giả sử đường tròn (C) đi qua cực và A là điểm đối xứng của O qua tâm đường tròn (C).

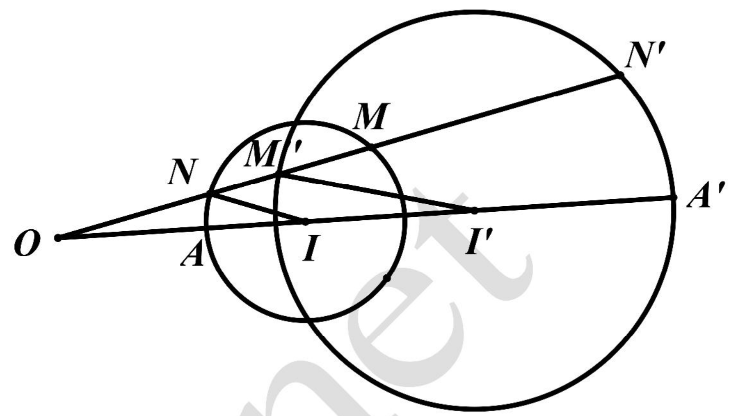
  Gọi $B = f(A)$, lấy M bất kì thuộc (C) (dĩ nhiên là $M \neq A$). Gọi $N = f(M)$ khi đó $\overline{OM}.\overline{ON} = k = \overline{OA}.\overline{OB}$ suy ra A, B, M, N cùng nằn trên một đường tròn $\Rightarrow ABN = AMO = 90^0$. Vậy quỹ tích N là đường thẳng đi qua B và vuông góc với OA. Hay ảnh của (C) là đường thẳng d không đi qua O và vuông góc với đường kính của đường tròn xuất phát từ cực O.



  Gọi (I) là đường tròn không đi qua cực O, M là điểm bất kì của (I). Gọi $N = OM \cap (I)$. Đặt $p = \overline{OM}.\overline{ON}$ thì $p = P_{O/(I)}$ khi đó (I) bất biến qua f_I^p. Gọi $M' = f_O^k$ thì $\overline{OM}.\overline{OM'} = k \Rightarrow \dfrac{\overline{OM'}}{\overline{ON}} = \dfrac{k}{p}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{k}{p}\overrightarrow{ON}$. Vậy M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, tỉ số $\frac{k}{p}$.

Đảo lại nếu M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, tỉ số $\frac{k}{p}$ thì



$\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{p}\overrightarrow{ON} \Rightarrow \overline{OM'} = \frac{k}{p}\overline{ON} \Rightarrow \overline{OM}.\overline{OM'} = \frac{k}{p}\overline{ON}.\overline{OM} = k \Rightarrow M'$ là ảnh của M qua phép nghịch đảo f_O^k.

Vậy ảnh của (I) qua phép nghịch đảo là đường tròn (I') -ảnh của (I) trong phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{k}{p} = \frac{k}{P_{O/(I)}}$.

Lưu ý: $f_O^k(I) \neq I'$

Tính chất 6.

Tích của hai phép nghịch đảo cùng cực $f_O^{k_1}$ và $f_O^{k_2}$ là một phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{k_2}{k_1}$.

Chứng minh:

Giả sử $f_O^{k_1}: M \to M_1, f_O^{k_2}: M_1 \to M'$ thì $\overline{OM}.\overline{OM_1} = k_1$ và O, M, M_1 thẳng hàng ; $\overline{OM_1}.\overline{OM'} = k_2$ O, M_1, M' thẳng hàng, suy ra $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{k_2}{k_1}$ và O, M, M' thẳng hàng, do đó $V_{\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)}: M \to M'$.

Vậy $f_O^{k_2} \circ f_O^{k_1} = V_{\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)}$.

Hệ quả: $V_{(O;k_2)} \circ f_O^{k_1} = f_O^{k_1.k_2}$ (Vì $f_O^{k_2} = V_{\left(O;\frac{k_2}{k_1}\right)} \circ f_O^{k_1}$).

Tính chất 7. Nếu phép nghịch đảo cực O, phương tích k biến A,B thành A',B' tương ứng thì $A'B'=\frac{|k|}{OA.OB}.AB$.

Chứng minh:

- Nếu A,B với cực O thẳng hàng thì A',B' nằm trên trục OAB và $\overline{OA}.\overline{OA'}=\overline{OB}.\overline{OB'}=k \Rightarrow \overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}$

$$=\frac{k}{\overline{OB}}-\frac{k}{\overline{OA}}=\frac{k}{\overline{OA}.\overline{OB}}\left(\overline{OA}-\overline{OB}\right)=\frac{k}{\overline{OA}.\overline{OB}}.\left(-\overline{AB}\right)\Rightarrow A'B'=\frac{|k|}{OA.OB}.AB.$$

- Nếu A,B,O không thẳng hàng thì từ $\overline{OA}.\overline{OA'}=\overline{OB}.\overline{OB'}=k\Rightarrow OA.OA'=OB.OB'$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB'}=\frac{OB}{OA'}\Rightarrow \Delta OAB\sim\Delta OB'A'\Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OB}=\frac{OA.OA'}{OA.OB}=\frac{|k|}{OA.OB}$$

$$\Rightarrow A'B'=\frac{|k|}{OA.OB}.AB.$$

Ta nói góc tạo bởi một đường thẳng và một đường tròn là góc tạo bởi đường thẳng đó với tiếp tuyến của đường tròn tại điểm chung của chúng.

Tính chất 8. Góc tạo bởi đường thẳng d và đường tròn (C) cùng đi qua cực nghịch đảo có số đo bằng góc tạo bởi ảnh của chúng trong phép nghịch đảo đó.(Bạn đọc tự chứng minh tính chất này)