HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa:

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

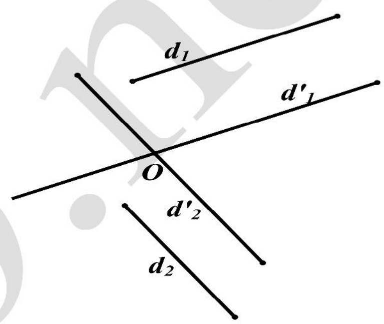
Bài toán 01: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 trong không gian ta có thể thực hiện theo hai cách

Cách 1. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng).

Từ O dựng các đường thẳng d_1', d_2' lần lượt song song (có thể tròng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với d_1 và d_2. Góc giữa hai đường thẳng d_1', d_2' chính là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2.



Lưu ý 1: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Cách 2. Tìm hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng d_1, d_2

Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 xác định bởi $\cos\left(d_1, d_2\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

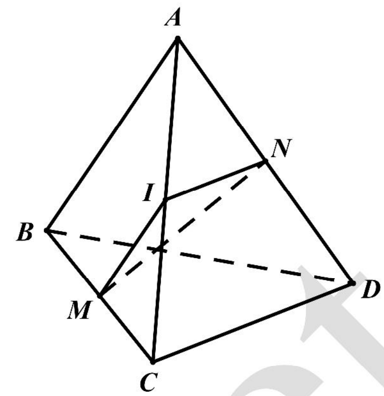
Lưu ý 2: Để tính $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}, \left|\overrightarrow{u_1}\right|, \left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng,sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB = CD = a, MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải.

Cách 1.



Gọi I là trung điểm của AC. Ta có

$$\begin{cases} IM \parallel AB \\ IN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB,CD)=(IM,IN)$$

Đặt $MIN = \alpha$

Xét tam giác IMN có

$IM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, IN = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Theo định lí côsin, ta có

$$\cos\alpha = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM.IN} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} < 0$$

$\Rightarrow MIN = 120^0$ suy ra $(AB,CD)=06^0$.

Cách 2. $\cos(AB,CD) = \cos(IM,IN) = \frac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \left(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}\right)^2 = IM^2 + IN^2 - 2\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM}$$

$$\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2} = -\frac{a^2}{8}$$

$$\cos(AB,CD) = \left|\cos(IM,IN)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|} = \frac{1}{2}$$

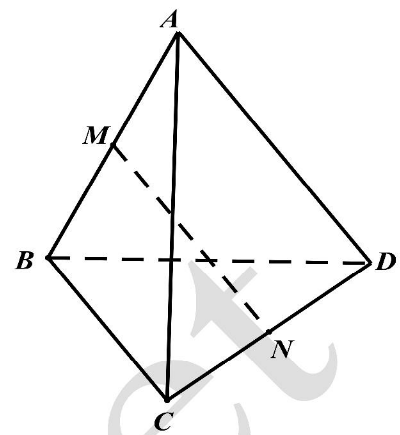
Vậy $(AB,CD)=60^0$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc gữa đường thẳng MN với các đường thẳng AB,BC và CD.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Khi đó, ta có $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = m$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{c},\vec{a}\right) = 60^0$.



Ta có $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \frac{m}{2}$.

Vì M,N là trung điểm của AB và CD nên

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\right)$

$MN^2 = \frac{1}{4}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}.\vec{c}\right) = \frac{m^2}{2}$

$\Rightarrow MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}$.

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\right)\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} - \vec{b}^2\right) = 0$

  Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 90^0.

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{c} - \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} - \vec{c}^2 + \vec{b}\vec{c}\right) = 0$

  Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và CD bằng 90^0.

- $\overrightarrow{MN}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\right)\left(-\vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{m^2}{2} \Rightarrow \cos\left(MN, BC\right) = \frac{\overrightarrow{MN}\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\frac{m^2}{2}}{m.\frac{m\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng 45^0.