GIỚI HẠN HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

1.1. Giới hạn hàm số: Cho khoảng K chứa điểm x_0. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ xác định trên K (có thể trừ điểm x_0) có giới hạn là L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có: $f(x_n) \to L$. Ta kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0.$$

1.2.Giới hạn một bên:

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n): x_0 < x_n < b$ mà $x_n \to x_0$ thì ta có: $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n): a < x_n < x_0$ mà $x_n \to x_0$ thì ta có: $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Chú ý: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

1.3. Giới hạn tại vô cực

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$ có giới hạn là L khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; b)$ có giới hạn là L khi $x \to -\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n < b$ và $x_n \to -\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

1.4.Giới hạn vô cực

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn dần tới dương vô cực khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to +\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

* Tương tự ta cũng có định nghĩa giới hạn dần về âm vô cực
* Ta cũng có định nghĩa như trên khi ta thay x_0 bởi $-\infty$ hoặc $+\infty$.

2. Các định lí về giới hạn

Định lí 1: Gới hạn của tổng, hiệu, tích, thương (mẫu số dẫn về $L \neq 0$) khi $x \to x_0$ (hay $x \to +\infty; x \to -\infty$) bằng tổng, hiệu, tích, thương của các giới hạn đó khi $x \to x_0$ (hay $x \to +\infty; x \to -\infty$) .

Chú ý: Định lí trên ta chỉ áp dụng cho những hàm số có giới hạn là hữu hạn. Ta không áp dụng cho các giới hạn dần về vô cực

Định lí 2: (Nguyên lí kẹp)

Cho ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên K chứa điểm x_0 (có thể các hàm đó không xác định tại x_0). Nếu $g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \forall x \in K$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

3. Một số gới hạn đặc biệt

* $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^{2k} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^{2k+1} = +\infty \ (-\infty)$

* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{k}{f(x)} = 0 \ \ (k \neq 0)$.