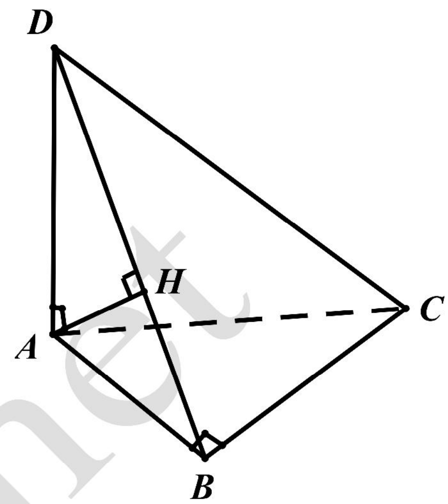
Đáp án chuyên đề:
Đường thẳng và mặt phẳng vuông góc - Hình học 11



26. a) Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Do đó $\left.\begin{matrix} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

b) Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp SC$.

27. a) Ta có O là trung điểm của AC và $SA = SC \Rightarrow SO \perp AC$.

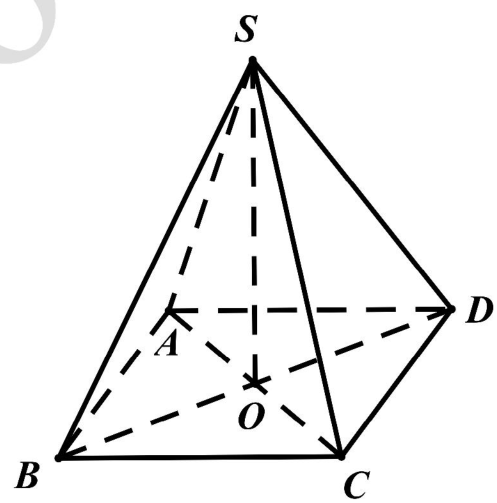
Tương tự $SO \perp BD$.

Vậy $\left.\begin{matrix} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

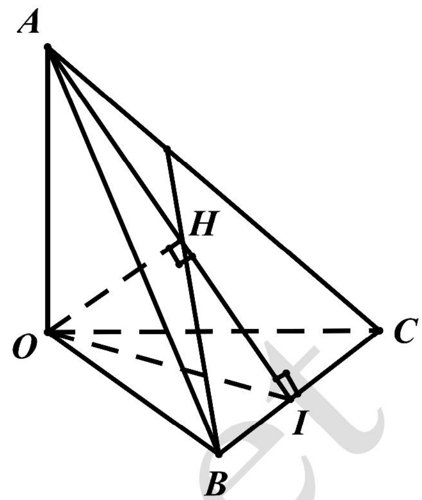
b) Ta có $AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình thoi).

Lại có $AC \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$)

Suy ra $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$.



28.



a) Ta có

$\left.\begin{matrix} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$

Lại có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$

Vậy $\left.\begin{matrix} BC \perp OA \\ BC \perp OH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (OAH)$

$\Rightarrow BC \perp AH \ (1)$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} AC \perp OB \\ AC \perp OH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (OBH)$

$\Rightarrow BH \perp AC \ (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$

Ta có $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Tương tự $AC = \sqrt{a^2 + c^2}, AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)}}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)}} > 0 \text{ suy ra } A \text{ nhọn.}$$

Tương tự các góc B, C nhọn.

c) Ta có $S^2_{ABC} = \frac{1}{4}AI^2BC^2 = \frac{1}{4}(OI^2 + OA^2)(OB^2 + OC^2)$

$$= \frac{1}{4}OI^2BC^2 + \frac{1}{4}OA^2OB^2 + \frac{1}{4}OA^2OC^2 = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$$

d) Gọi I là điểm cách đều 4 điểm O, A, B, C và G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO})^2$$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MI \perp OG$ (do $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$)

Vậy M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG.

29.

a) Ta có $\left.\begin{matrix} AB \perp BC \\ AB \perp BE \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (BCE)$

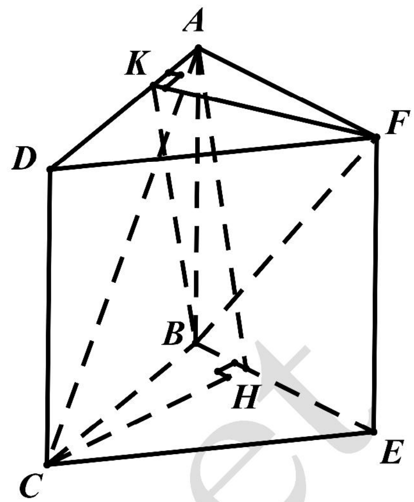
$\Rightarrow AB \perp CH$.

Vậy $\left\{\begin{matrix} CH \perp AB \\ CH \perp BE \end{matrix}\right. \Rightarrow CH \perp (ABEF)$

$\Rightarrow CH \perp AH$, hay ΔACH vuông tại H.

Tương tự $\left.\begin{matrix} FK \perp AD \\ FK \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow FK \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \Delta BFK$ vuông tại K.



b) Ta có $CH \perp (ABEF) \Rightarrow CH \perp BF$, mặt khác $AC \perp BF \Rightarrow BF \perp (ACH) \Rightarrow BF \perp AH$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} AC \perp KF \\ AC \perp BF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (BKF) \Rightarrow AC \perp BK$.

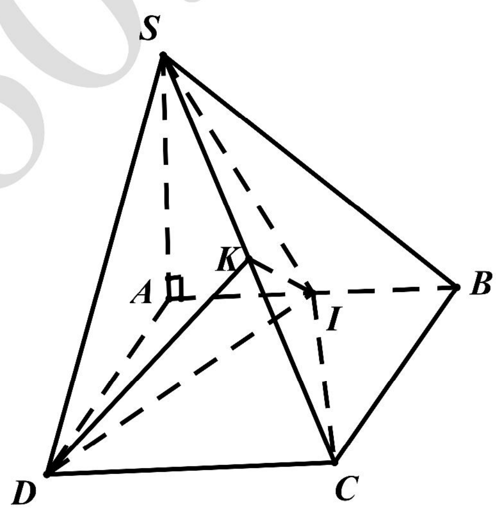
30. Ta có

$IS = \sqrt{AI^2 + AS^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Tương tự $ID = IC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ suy ra $IS = ID = IC$ nên I thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD.

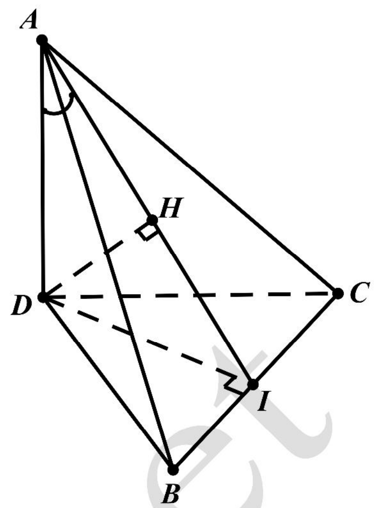
Mặt khác $\left\{\begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{matrix}\right. \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D, lại có K là trung điểm của SC nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD, do đó $KI \perp (SCD)$.



Ta có $IK^2 = ID^2 - DK^2 = ID^2 - \frac{1}{4}SC^2 = ID^2 - \frac{1}{4}(SA^2 + AC^2)$

$\frac{5a^2}{4} - \frac{1}{4}(a^2 + 2a^2) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



31. Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)

Khi đó H là trực tâm của tam giác ABC.

Và $(DA,(ABC)) = (DA, AH) = DAH = \alpha$

Đặt $DA = a, DB = b, DC = c$

Gọi $I = AH \cap BC$ thì DI là đường cao của tam giác DBC nên $DI = \frac{DB.DC}{BC} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

$\cot^2\alpha = \frac{DA}{DI} = \frac{a^2(b^2 + c^2)}{b^2c^2}$

$\Rightarrow 2 + \cot^2\alpha = 2 + \frac{a^2(b^2 + c^2)}{b^2c^2} \geq 2 + \frac{2a^2}{bc} \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}}$

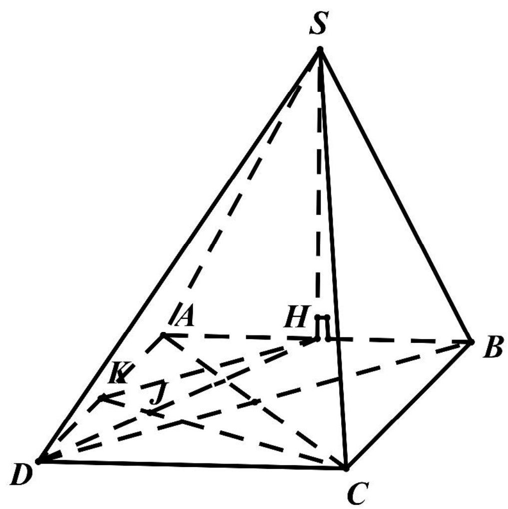
Vậy $2 + \cot^2\alpha \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}}$ (1)

Tương tự $2 + \cot^2\beta \geq \frac{4b}{\sqrt{ac}}$ (2) và $2 + \cot^2\gamma \geq \frac{4c}{\sqrt{ab}}$ (3)

Nhân theo vế các BĐT $(1),(2),(3)$ ta được

$(2 + \cot^2\alpha)(2 + \cot^2\beta)(2 + \cot^2\gamma) \geq 64$ (đpcm)

32.



a) Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$

lại có $\begin{cases} HK \,//\, BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp HK$

$\Rightarrow AC \perp (SHK)$.

b) Dễ thấy

$\Delta AHD = \Delta DKC \Rightarrow AHD = DKC$

mà $AHD + ADH = 90^0$

$\Rightarrow DKC + ADH = 90^0$ hay $DH \perp CK$, mặt khác ta có

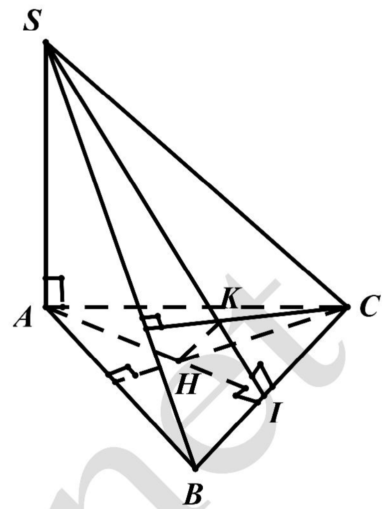
$SH \perp CK \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow CK \perp SD$

.

33.

a) Gọi $I = AH \cap BC$, để chứng minh AH, SK và BC đồng qui.

Ta cần chứng minh SI là đường cao của tam giác SBC, nhưng điều này đúng do $BC\perp SA$ và $BC\perp AI$.



b) Ta có $SB\perp CK$

thêm nữa ta có

$$\begin{cases} CH\perp AB \\ CH\perp SA \end{cases}\Rightarrow CH\perp\left(SAB\right)\Rightarrow CH\perp SB$$

Vậy $SB\perp\left(CHK\right)$.

b) Theo các chứng minh trên ta có

$SB\perp\left(CHK\right)\Rightarrow SB\perp HK$ và

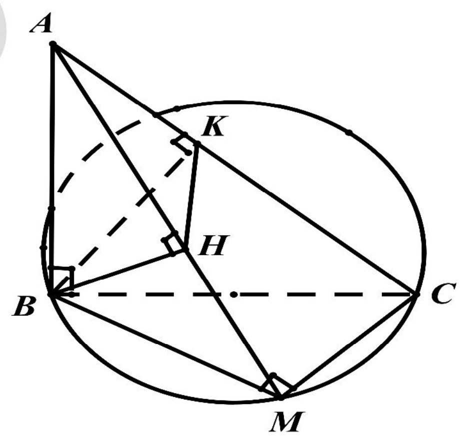
$BC\perp\left(SAI\right)\Rightarrow BC\perp HK$ do đó $HK\perp\left(SBC\right)$.

34.

a) Ta có $AB\perp\left(\alpha\right)\Rightarrow\begin{cases} AB\perp BM \\ AB\perp BC \end{cases}$ suy ra các tam giác ABM và ABC vuông tại B.

Tiếp theo ta có $\begin{cases} MC\perp MB \\ MC\perp AB \end{cases}\Rightarrow MC\perp\left(ABM\right)$

$\Rightarrow MC\perp AM$ hay tam giác ACM vuông tại M.



b) Ta có $\begin{cases} BH\perp AM \\ BH\perp MC \end{cases}\Rightarrow BH\perp\left(ACM\right)$

$\Rightarrow BH\perp AC$.

Vậy $\left.\begin{matrix} AC\perp BH \\ AC\perp BK \end{matrix}\right\}\Rightarrow AC\perp\left(BHK\right)$.

c) Dễ thấy BK cố định và $BHK=90^0$ nên điểm H thuộc đường tròn đường kính BK. Từ đó ta có tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BK.

d) $MA^2=AB^2+BM^2$ mà AB không đổi nên AM lớn nhất khi MB lớn nhất $\Leftrightarrow BM=BC\Leftrightarrow M\equiv C$.

e) Ta có $S_{BHK}=\dfrac{1}{2}BH.HK\le\dfrac{BH^2+HK^2}{4}=\dfrac{BK^2}{4}$ không đổi nên

$\max S_{BHK}=\dfrac{BK^2}{4}\Leftrightarrow BH=HK$, lúc này ΔHBK vuông cân tại H nên

$BH=\dfrac{BK}{\sqrt{2}}$.

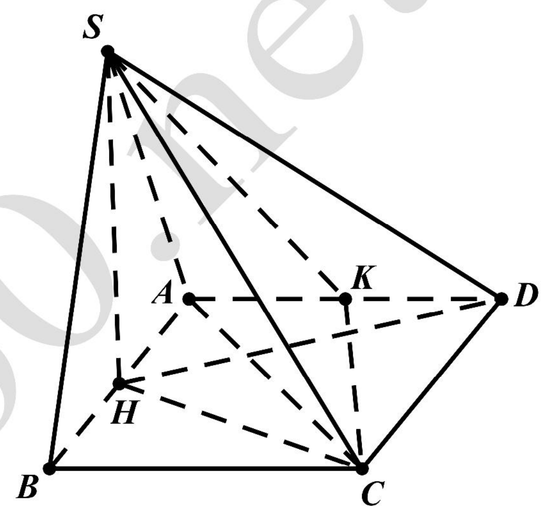
Ta có $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BM^2};\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}$

nên $2\left(\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BC^2}\right)=\frac{1}{BM^2}+\frac{1}{BA^2}\Leftrightarrow\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{2}{BC^2}$

$\Leftrightarrow MB=\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

Vậy $\max S_{BHK}=\frac{BK^2}{4}\Leftrightarrow\Leftrightarrow MB=\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}\Leftrightarrow$ M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính.

35.



a) Vì H là trung điểm của AB và tam giác SAB đều nên $SH\perp AB$

Lại có $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2},SC=a\sqrt{2},$

$HC=\sqrt{DH^2+DC^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó

$HC^2+HS^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{5a^2}{4}=2a^2=SC^2$

$\Rightarrow\Delta HSC$ vuông tại $H\Rightarrow SH\perp HC$

Vậy $\begin{cases}SH\perp HC\\SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

b) Ta có $AC\perp HK$ và $AC\perp SH\Rightarrow AC\perp(SHK)$

$\Rightarrow AC\perp SK$.

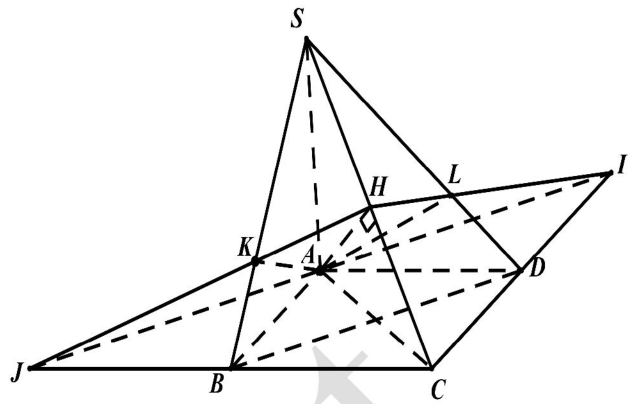
Tương tự $CK\perp HD$ (như bài 32) và $CK\perp SH\Rightarrow CK\perp(SDH)\Rightarrow CK\perp SD$.

36.

a) ΔSBC vuông tại $B\Rightarrow BC\perp SB$ mà $BC\perp AD\Rightarrow BC\perp(SAB)$

$\Rightarrow BC\perp SA$.

Tương tự ta có $SA\perp CD$ nên $SA\perp(ABCD)$.



Ta có

$SC=\sqrt{DS^2+DC^2}=a\sqrt{6}$

$\Rightarrow SB=\sqrt{SC^2-BC^2}=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a$.

Vậy $SA=a$.

b) Do $\begin{cases} IJ\perp AC \\ IJ\perp SA \end{cases}\Rightarrow IJ\perp(SAC)\Rightarrow IJ\perp SC$

Lại có

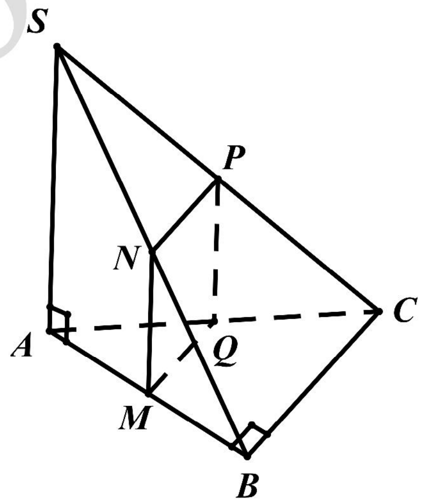
$AH\perp SC\Rightarrow(HIJ)\perp SC\Rightarrow AK\perp SC \quad (1)$

Dễ thấy $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AK \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $AK\perp(SBC)$.

Lập luận tương tự ta có $AL\perp(SCD)$.

37. a) Ta có $\begin{cases} (\alpha)\perp AB \\ SA\perp AB \end{cases}\Rightarrow SA\,//\,(\alpha)$



Do đó

$\begin{cases} M\in(SAB)\cap(\alpha) \\ SA\subset(SAB) \\ SA\,//\,(\alpha) \end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SAB)=MN\,//\,SA$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha)\perp AB \\ BC\perp AB \end{cases}\Rightarrow BC\,//\,(\alpha)$

$\begin{cases} M\in(\alpha)\cap(ABC) \\ BC\subset(ABC) \\ BC\,//\,(\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=MQ\,//\,BC, Q\in AC$

$\begin{cases} N\in(SBC)\cap(\alpha) \\ BC\subset(SBC) \\ BC\,//\,(\alpha) \end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SBC)=NP\,//\,BC, P\in SC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Ta có $MN\,//\,SA, PQ\,//\,SA\Rightarrow MN\,//\,PQ$ và $MQ\,//\,BC, NP\,//\,BC\Rightarrow MQ\,//\,NP$ nên $MNPQ$ là hình bình hành.

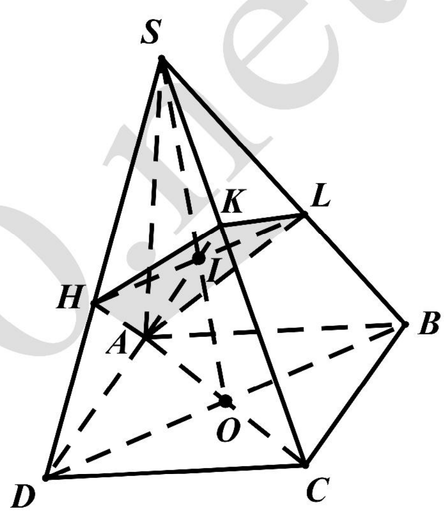
Mặt khác $\begin{cases} MN \,//\, SA \\ NP \,//\, BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow MN \perp NP$. Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật.

b) Ta có $MQ = AM = x$, $\dfrac{MN}{SA} = \dfrac{MB}{AB} \Rightarrow MN = \dfrac{MB.SA}{AB} = \dfrac{(a-x)a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}(a-x)$

$S_{MNPQ} = MN.MQ = \sqrt{3}(a-x)x = \sqrt{3}[\dfrac{a^2}{4} - \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2] \le \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\max S_{MNPQ} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ khi $x = \dfrac{a}{2}$.

38. a) Gọi K là hình chiếu của A trên SC thì $K \in (\alpha)$.Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AK$.



Ta có $\left.\begin{matrix} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SC$, mặt khác $(\alpha) \perp SC$ nên $BD \,//\, (\alpha)$.

Vậy $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (SBD) \\ BD \subset (SBD) \\ BD \,//\, (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = HL \,//\, BD, H \in SD, L \in SB$

Thiết diện là tứ giác $AHKL$.

b) Do $\begin{cases} HL \,//\, BD \\ BD \perp AK \end{cases} \Rightarrow HL \perp AK \Rightarrow S_{AHKL} = \dfrac{1}{2}AH.KL$

Ta có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại A, mà $AK \perp SC$ nên K là trung điểm của $SC \Rightarrow AK = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.

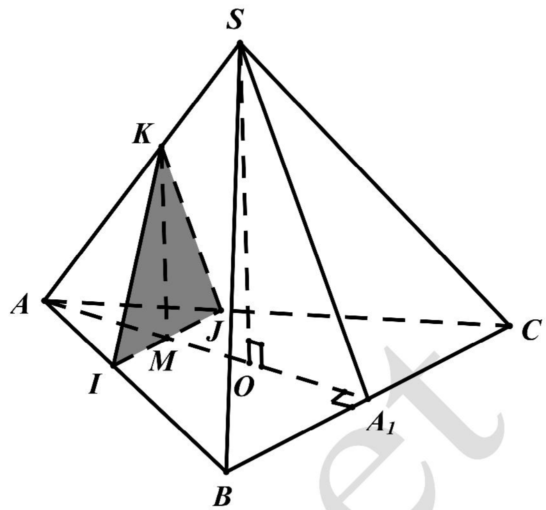
$HL \,//\, BD \Rightarrow \dfrac{HL}{BD} = \dfrac{SH}{SD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HL = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$

Vậy $S_{AHKL} = \dfrac{1}{2}a.\dfrac{2a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

39. a) Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên

$SO \perp (ABC)$(O là tâm tam giác ABC).Do đó $SO \perp AA_1$ mà $(\alpha) /\!/ AA_1 \Rightarrow SO /\!/ (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC /\!/ (\alpha)$



Trường hợp 1. $x = 0$ thì thiết diện là điểm A.

Trường hợp 2. $0 < x \le \frac{a\sqrt{3}}{3}$ thì M thuộc đoạn $AO(M \ne A)$.

Ta có :

$$\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC /\!/ (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ /\!/ BC, I \in AB, J \in AC$$

Tương tự $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \\ SO /\!/ (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MK /\!/ SO, K \in SA$.

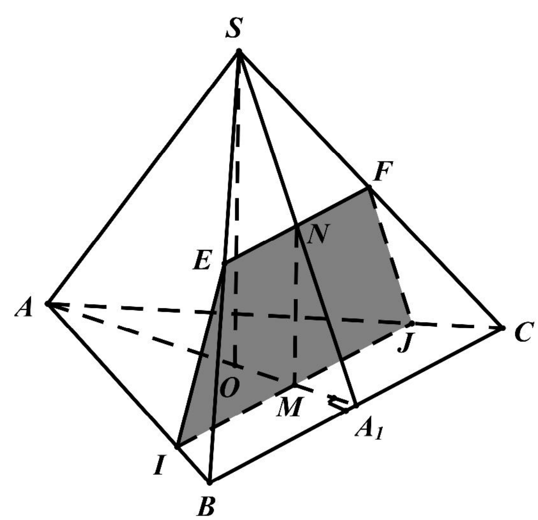
Thiết diện là tam giác KIJ.

Trường hợp 3. $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ khi đó M thuộc đoạn $OA(M \ne 0; M \ne A)$

Tương tự như trường hợp trên ta có:

$$\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC /\!/ (\alpha) \end{cases}$$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ /\!/ BC$, $I \in AB, J \in AC$.



$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \\ SO \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MN \,//\, SO, N \in SA_1.$$

$$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC \subset (SBC) \\ BC \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = EF \,//\, IJ, N \in EF$$

Thiết diện là tứ giác $IJEF$.

Trường hợp 4. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì thiết diện là đoạn BC.

b) Xét các trường hợp:

$x = 0 \Rightarrow S_{td} = 0$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{td} = 0$

$0 < x \le \frac{a\sqrt{3}}{3}$, thì $S_{IJK} = \frac{1}{2} IJ.MK$.

Ta có $IJ \,//\, BC \Rightarrow \frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA_1} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$

Tương tự $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow MK = 2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{IJK} = \frac{1}{2}\frac{2x\sqrt{3}}{3}.2x\sqrt{3} = 2x^2$.

$\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{2}}{3}$, dễ thấy $IJEF$ là hình thang nên $S_{IJEF} = \frac{1}{2}(IJ + EF)MN$

$IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$, $\frac{EF}{BC} = \frac{SN}{SA_1} = \frac{OM}{OA_1} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow EF = 2\left(x\sqrt{3} - a\right)$

$\frac{MN}{SO} = \frac{MA_1}{OA_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow MN = 2\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$

Vậy $S_{IJEF} = \frac{2}{3}\left(4x\sqrt{3} - 3a\right)\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$.

Xét các trường hợp ta thấy S_{td} lớn nhất trong trường hợp $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$

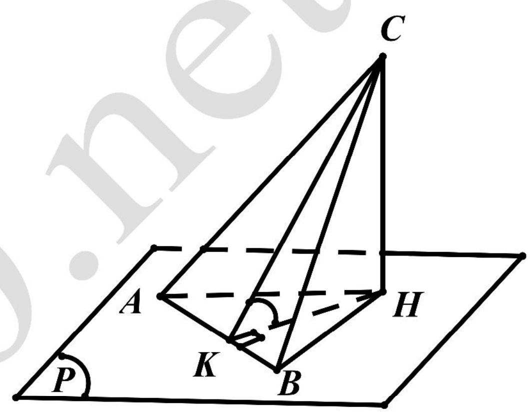
và $\max S_{IJEF} = \frac{3a^2}{4}$ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

40. Kẻ $CH \perp (P)$ thì CKH là góc giữa CK và (P) và dễ thấy

$(CA,(P)) = CAH = \alpha, (CB,(P)) = CBH = \beta$

Đặt $CH = h$, ta có $CA = \frac{h}{\sin\alpha}, CB = \frac{h}{\sin\beta}$

$AB^2 = CA^2 + CB^2 = \frac{h^2}{\sin^2\alpha} + \frac{h^2}{\sin^2\beta}$



$= h^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta}\right)$.

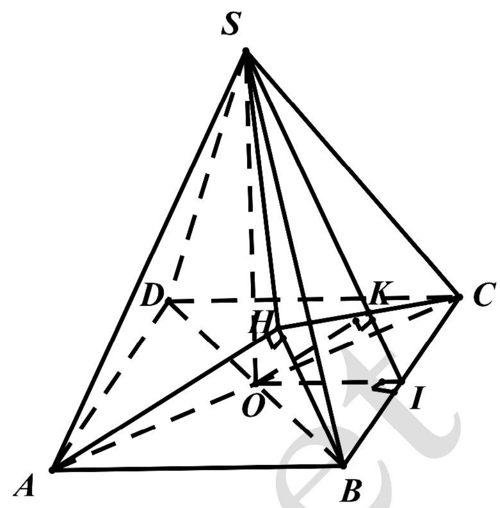
Xét tam giác ABC có $CK.AB = CA.CB$

$$\Rightarrow CK = \frac{CA.CB}{AB} = \frac{\frac{h}{\sin\alpha}.\frac{h}{\sin\beta}}{\sqrt{\frac{1}{h^2}\left(\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\right)}}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}.$$

Ta có $\sin CKH = \frac{CH}{CK} = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.

41.



a) Dễ thấy $\left(SA,\left(ABCD\right)\right) = SAO = \varphi$

nên $SO = SA\cos\varphi \ \left(1\right)$.

Gọi I là trung điểm của BC thì ta có

$\begin{cases} OI \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SIO\right)$

Kẻ $OK \perp SI$ thì $OK \perp BC$ nên $OK \perp \left(SBC\right)$.

Kẻ $At \,//\, OK$ cắt CK tại H, khi đó ta có $\begin{cases} AH \,//\, CK \\ CK \perp \left(SBC\right) \end{cases} \Rightarrow AH \perp \left(SBC\right)$ nên

$\left(SA,\left(SBC\right)\right) = SAH = \varphi$ do đó

$AH = SA\cos\varphi \ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right)$ ta có $AH = SO$.

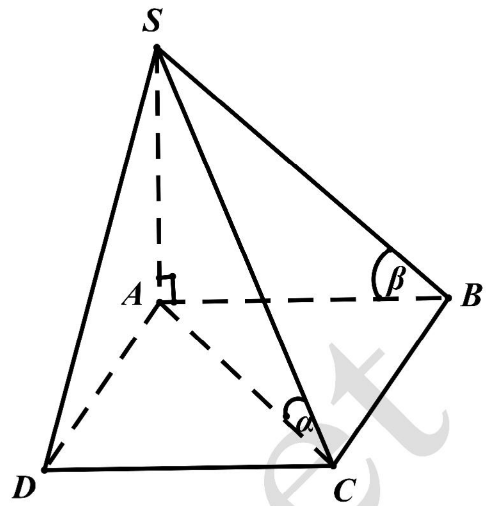
Khi $BH = \dfrac{a}{2}$ thì trong tam giác vuông HAB có

$$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow SO = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

b) $\tan\varphi = \dfrac{SO}{OA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \Rightarrow \varphi = \arctan\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

42.



a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD))$

$= SAC = \alpha.$

Tương tự $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SC,(SAB)) = SBC = \beta.$

$SA = SC\sin\alpha = a\sin\alpha$

b) $SB = SC\sin\beta = a\sin\beta$

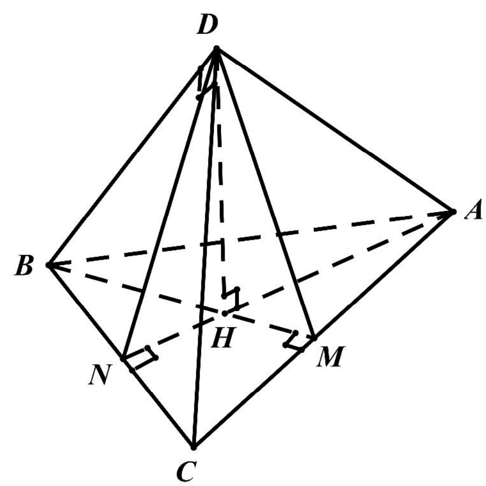
$AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = \sqrt{a^2\sin^2\beta - a^2\sin^2\alpha}$

$= a\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\beta}{2} - \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}.$

$= a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

43. (HS tự giải)

44.



a) Vì $\begin{cases} BC \perp DH \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH)$

$\Rightarrow BC \perp DA \quad (1)$

Tương tự ta có

$(BDH) \perp AC \Rightarrow DB \perp AC$, vì vậy

$\begin{cases} DB \perp DC \\ DB \perp AC \end{cases} \Rightarrow DB \perp (ACD)$

$\Rightarrow DB \perp DA \quad (2).$

Từ $(1),(2)$ suy ra

$DA \perp (BCD) \Rightarrow DA \perp DC$ ha $CDA = 90^0$.

b) Từ câu a) ta thấy tứ diện $ABCD$ có các cạnh DA, DB, DC đôi một vuông góc.

Theo BĐT Cauchy-Schwraz ta có

$\left(AB+BC+CA\right)^2 \le 3\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$

Mà $\begin{cases} AB^2 = DA^2 + DB^2 \\ BC^2 = DB^2 + DC^2 \\ CA^2 = DA^2 + DC^2 \end{cases}$ nên $\left(AB+BC+CA\right)^2 \le 6\left(DA^2+DB^2+DC^2\right)$.

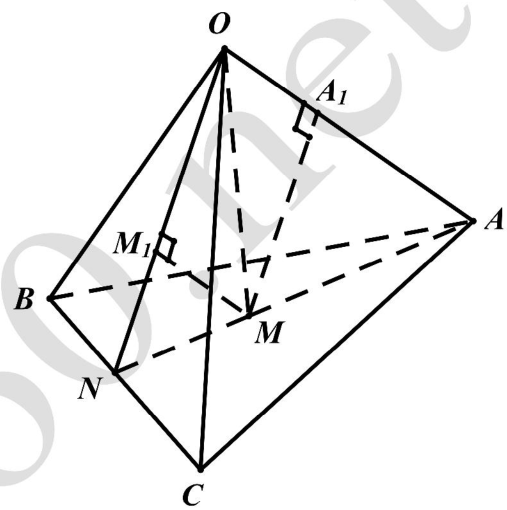
Đẳng thức xảy ra khi $AB = BC = CA \Rightarrow \Delta ABC$ đều, kết hợp với chân đường cao của D trùng với tâm đáy ta được $D.ABC$ là hình chóp đều đỉnh D.

45.

a) Gọi $N = AM \cap BC$, kẻ $MM_1 \,//\, OA$ thì ta có

$\begin{cases} OA \perp (OBC) \\ MM_1 \,//\, OA \end{cases} \Rightarrow MM_1 \perp (OBC)$

kẻ $MA_1 \perp OA, A_1 \in OA$. Khi đó



$AM^2 = AA_1^2 + MA_1^2 = AA_1^2 + MO^2 - OA_1^2 = OM^2 + \left(AA_1 - OA_1\right)\left(AA_1 + OA_1\right)$

$= OM^2 + OA\left(OA - 2OA_1\right)$

$= OM^2 + OA^2 - 2OA.OA_1$

Suy ra $\dfrac{AM^2}{OA^2} = \dfrac{OM^2}{OA^2} + 1 - \dfrac{2OA_1}{OA}$ (1).

Tương tự gọi B_1, C_1 là các điểm tương tự như A_1 thì ta có

$\dfrac{MB^2}{OB^2} = \dfrac{OM^2}{OB^2} + 1 - \dfrac{2OB_1}{OB}$ (2)

$\dfrac{MC^2}{OC^2} = \dfrac{OM^2}{OC^2} + 1 - \dfrac{2OC_1}{OC}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $T = OM^2\left(\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}\right) - 2\left(\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC}\right) + 3$

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì ta đã biết kết quả quen thuộc

$\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{OH^2}$ nên $T = \dfrac{OM^2}{OH^2} - 2\left(\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC}\right) + 3$

Mặt khác $\frac{OA_1}{OA}=\frac{NM}{NA}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự $\frac{OB_1}{OB}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}},\frac{OC_1}{OC}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$ nên $\frac{OA_1}{OA}+\frac{OB_1}{OB}+\frac{OC_1}{OC}=1$

Do đó $T=\frac{OM^2}{OH^2}+1\ge 2$ do $OM\ge OH$.

Vậy $\min T=2$ khi $M\equiv H$.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Do A,B,C,M đồng phẳng nên tồn tại x,y,z sao cho $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ $(x+y+z=1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(x-1)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, bình phương vô hướng ta được

$AM^2=(x-1)^2a^2+y^2b^2+z^2c^2\Rightarrow\frac{MA^2}{OA^2}=(x-1)^2+\frac{y^2b^2}{a^2}+\frac{z^2c^2}{a^2}$.

Tương tự $\frac{MB^2}{OB^2}=\frac{x^2a^2}{b^2}+(y-1)^2+\frac{z^2c^2}{b^2},\frac{MC^2}{OC^2}=\frac{x^2a^2}{c^2}+\frac{y^2b^2}{c^2}+(z-1)^2$

Vì vậy $T=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right)+1$

$\ge\left(\frac{1}{a}.ax+\frac{1}{b}.by+\frac{1}{c}.cz\right)^2+1=2$ (Theo Cauchy-Schwarz)

Vậy $\min T=2$.

b) Dễ thấy $\alpha=AOH,\beta=BOH,\gamma=COH$.

Ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}\Leftrightarrow\left(\frac{OH}{OA}\right)^2+\left(\frac{OH}{OB}\right)^2+\left(\frac{OH}{OC}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\ (1)$.

Lại có $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}\Leftrightarrow\cos^2x=\frac{1}{1+\tan^2x}=\frac{\cot^2x}{1+\cot^2x}\quad(*)$

Áp dụng CT (*) cho x nhận các giá trị α,β,γ và kết hợp với (1) thu được

$\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}+\frac{\cot^2\beta}{1+\cot^2\beta}+\frac{\cot^2\gamma}{1+\cot^2\gamma}=1$.

Đặt $x=\cot^2\alpha,y=\cot^2\beta,z=\cot^2\gamma$ $(x,y,z>0)$ thì bài toán trở thành

Cho $x,y,z>0$ thỏa $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1$. Chứng minh $xyz\le\frac{1}{8}$.

Ta có $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1\Leftrightarrow 1-\frac{x}{1+x}=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\ge 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$ (2).

Tương tự ta có :

$\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{(1+x)(1+z)}}(3)$ và $\frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$ (4)

Nhân theo từng vế các BĐT $(2),(3)(4)$ ta được $xyz \leq \frac{1}{8}$ $(dpcm)$.

c) Tương tự như câu b) ta có $\min S = 6\sqrt{3}$.