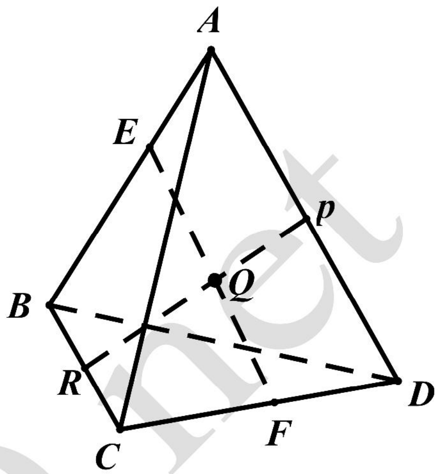
Đáp án chuyên đề:
Vectơ trong không gian - Hình học 11

1. Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ}\ \ (1)$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FQ}\ \ (2)$



Từ (2) ta có $l\overrightarrow{PQ}=l\overrightarrow{PD}+l\overrightarrow{DF}+l\overrightarrow{FQ}\quad (3)$

Lấy $(1)-(3)$ theo vế ta có

$(1-l)\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AE}-l\overrightarrow{DF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\dfrac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}$

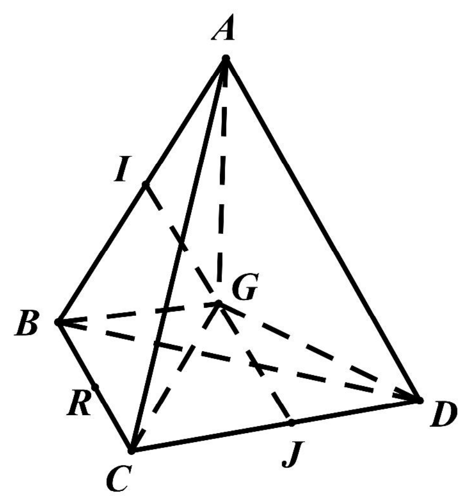
Tương tự $\overrightarrow{QR}=\dfrac{1}{1-l}\overrightarrow{EB}-\dfrac{l}{1-l}\overrightarrow{FC}$

Mặt khác $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ nên

$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\dfrac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}=\dfrac{-k}{1-l}\overrightarrow{EB}-\dfrac{kl}{1-l}\overrightarrow{FC}=-k\overrightarrow{QR}$

Vậy P,Q,R thẳng hàng.

2.



a) $\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}\\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$

$=2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}\right)=\vec{0}$.

c) Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MG}\right|$ nên

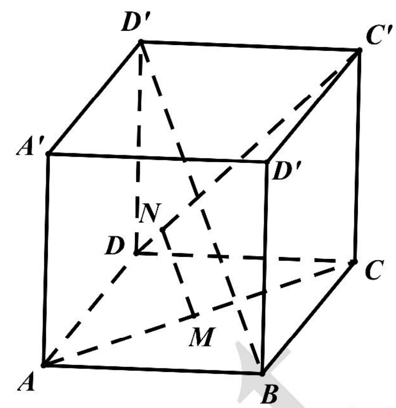
$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv G$.

3. $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{BB'}=\vec{c}$.

Giả sử $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DN}=y\overrightarrow{DC'}$.

Dễ dàng có các biểu diễn $\overrightarrow{BM}=(1-x)\vec{a}+x\vec{b}$ và $\overrightarrow{BN}=(1-y)\vec{a}+\vec{b}+y\vec{c}$. Từ đó suy ra $\overrightarrow{MN}=(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+y\vec{c}\ \ (1)$

Để $MN\,//\,BD'$ thì $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BD'}=z\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\ \ (2)$



Từ (1) và (2) ta có:

$$(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+y\vec{c}=z\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

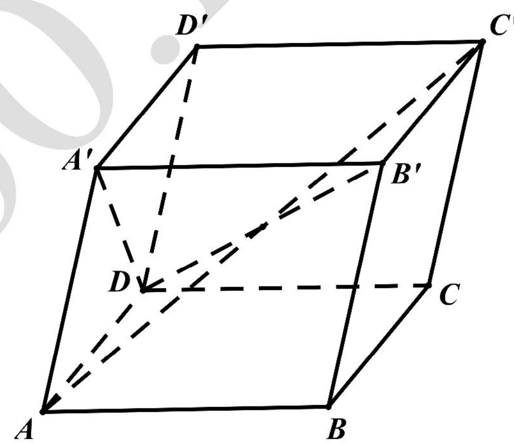
$$\Leftrightarrow (x-y-z)\vec{a}+(1-x-z)\vec{b}+(y-z)\vec{c}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 1-x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy các điểm M,N được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$.

Ta cũng có $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BD'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}\Rightarrow \frac{MN}{BD'}=\frac{1}{3}$.

4.



a) Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{A'B'}=\vec{b},\overrightarrow{A'D'}=\vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{A'D}=\vec{a}+\vec{c}$ nên

$$\cos\left(AB,A'D\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D}\right)\right|$$

$$=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'D}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A'D}\right|}=\frac{\left|\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}+\vec{c}\right|}.$$

Để ý rằng $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=a$, $\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\frac{a^2}{2}$.

Từ đó

$$\cos\left(AB,A'D\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(AB,A'D\right)=60^0$$

Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a},\overrightarrow{B'D}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, từ đó tính được

$$\overrightarrow{AC'}\overrightarrow{B'D}=\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=0\Rightarrow\left(AC',B'D\right)=90^0.$$

b) $\overrightarrow{A'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\overrightarrow{B'D}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{B'D}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=0$

$\Rightarrow A'C\perp B'D$ nên $S_{A'B'DC}=\frac{1}{2}A'C.B'D$.

Dễ dàng tính được $A'C=a\sqrt{2},B'D=a\sqrt{2}\Rightarrow S_{A'B'CD}=\frac{1}{2}a\sqrt{2}a.\sqrt{2}=a^2$

$S_{AA'C'C}=AA'AC\sin\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)$, $AA'=a,Ac=a\sqrt{3}$.

Tính được $\sin\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

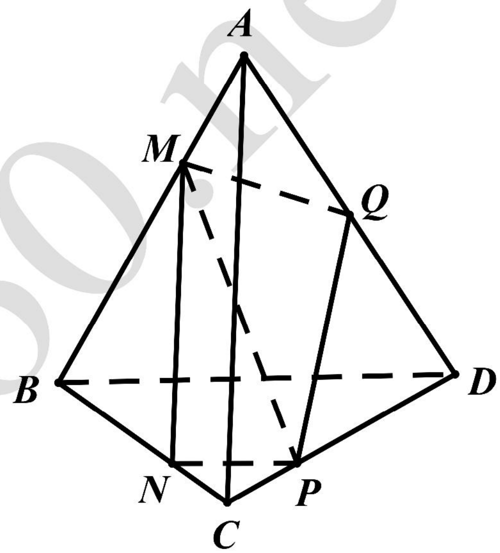
Vậy $S_{AA'C'C}=AA'AC\sin\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)=a.a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}=a^2\sqrt{2}$.

c) ĐS: $\left(AC',AB\right)=\left(AC',AD\right)=\left(AC',AA'\right)=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. $S_{ABC}=\frac{1}{2}ABAC\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AB^2\sin^2 A}=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2\left(1-\cos^2 A\right)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

6. ***Cách 1.***



Ta có

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Lại có $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ do đó $MN\,//\,AC$.

Vậy Nếu M,N,P,Q đồng phẳng thì $\left(MNPQ\right)\cap\left(ACD\right)=PQ\,//\,AC$

$\Rightarrow\frac{PC}{PD}=\frac{QA}{QD}=1$ hay

$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{DA}=\vec{a},\overrightarrow{DB}=\vec{b},\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ thì không khó khăn ta có các biểu diễn

$\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{MP}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+k\vec{c}$, $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

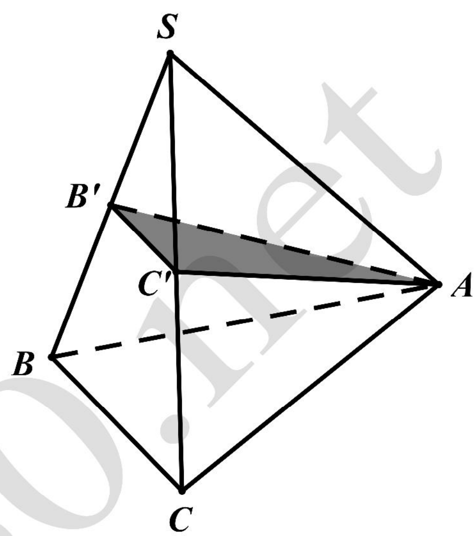
Các điểm M,N,P,Q đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\exists x,y:\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MQ}$

$\Leftrightarrow-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+k\vec{c}=x\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)+y\left(-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

Do các vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nên điều này tương đương với

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y=-\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x=k \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}, y=1, k=\frac{1}{2}.$$

7. Gọi B',C' lần lượt là trung điểm của SB,SC. Thiết diện là tam giác $AB'C'$.



Theo bài tập 5 thì

$$S_{AB'C'}=\frac{1}{2}\sqrt{AB'^2\,AC'^2-\left(\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}\right)^2}$$

Ta có $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{SB'}-\overrightarrow{SA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}$

$$\Rightarrow AB'^2=\frac{1}{4}SB^2+SA^2-\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SB}$$

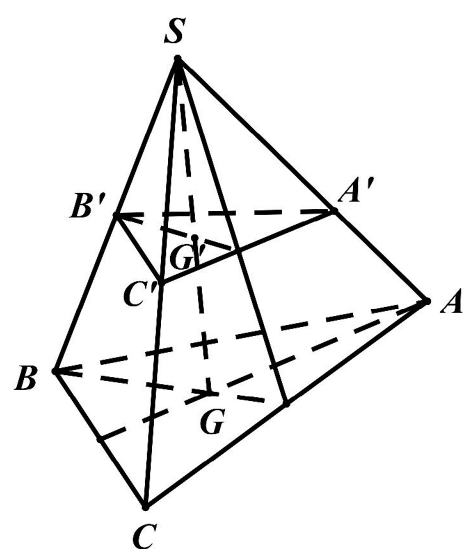
$=\frac{a^2}{4}\left(5-4\cos\alpha\right)$. Tính tương tự, ta có

$$\overrightarrow{AB'}\overrightarrow{AC'}=\frac{a^2}{4}\left(4-3\cos\alpha\right).$$

Vậy $S_{AB'C'}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{16}\left(5-4\cos\alpha\right)^2-\frac{a^4}{16}\left(4-3\cos\alpha\right)^2}$

$$=\frac{a^2}{8}\sqrt{7\cos^2\alpha-16\cos\alpha+9}.$$

8. Do G là trọng tâm của ΔABC nên



$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$$

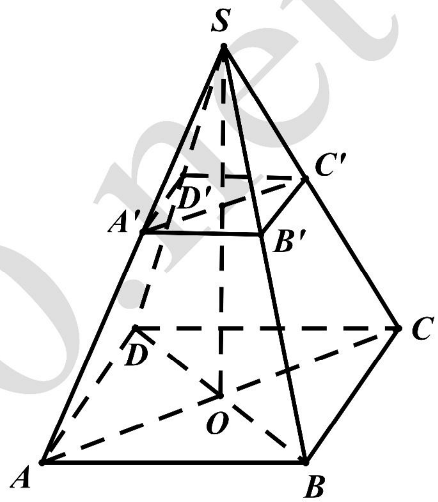
$$\Leftrightarrow 3\frac{SG}{SG'}\overrightarrow{SG'}=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$$

Mặt khác A',B',C',G' đồng phẳng nên

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}.$$

Chú ý: Ta có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng :

Nếu M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC thì $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ trong đó S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB. Vì vậy ta có bài toán tổng quát hơn như sau:
Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA,SB,SC,SM (M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A',B',C',M'.
Chứng minh: $\frac{S_aSA}{SA'}+\frac{S_bSB}{SB'}+\frac{S_cSC}{SC'}=\frac{S.SM}{SM'}$. (Với S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB và S là diện tích tam giác ABC).



9. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SC'}=\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$ Do A',B',C',D' đồng phẳng nên đẳng thức trên $\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

10. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$.

Mà G,A',B',C' đồng phẳng nên $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\Leftrightarrow \frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}=3$

Theo BĐT Cauchy schwarz:

Ta có $\left(\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi

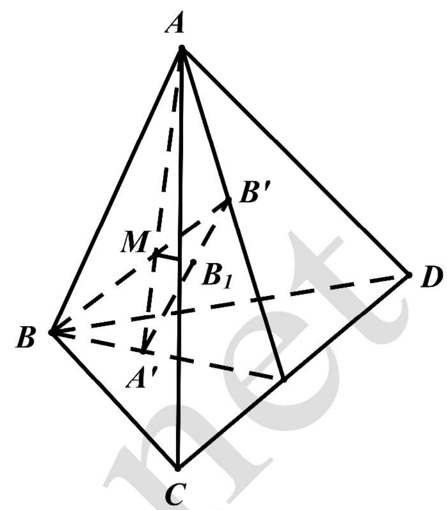
$\frac{1}{aSA'}=\frac{1}{bSB'}=\frac{1}{cSC'}$ kết hợp với $\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}=3$ ta được

$SA'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3a},SB'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3b},SC'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3c}$.

Vậy GTNN của $\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}$ là $\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

11. Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên tồn tại $x,y,z,t>0$ sao cho $x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}+t\overrightarrow{MD}=\vec{0}\quad(1)$

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (BCD).



Ta có

$$\begin{cases}(\alpha)\,//\,(BCD)\\(BB'A')\cap(\alpha)=MB_1\\(BB'A')\cap(BCD)=BA'\end{cases}\Rightarrow MB_1\,//\,BA'.$$

Do đó $\dfrac{MB_1}{BA'}=\dfrac{MB'}{BB'}\Rightarrow\overrightarrow{MB_1}=\dfrac{MB'}{BB'}\overrightarrow{BA'}\quad(2)$

Trong (1), chiếu các vec tơ lên đường thẳng BB' theo phương (ACD) ta được:

$$x\overrightarrow{MB'}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MB'}+t\overrightarrow{MB'}=\vec{0}\Rightarrow(x+y+z)\overrightarrow{MB'}+y\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow(x+y+z+t)\overrightarrow{MB'}=y\overrightarrow{BB'}\Rightarrow\frac{MB'}{BB'}=\frac{y}{x+y+z+t}$$

Từ (2) suy ra $\overrightarrow{MB_1}=\dfrac{y}{x+y+z+t}\overrightarrow{BA'}\quad(3)$

Tương tự ta có $\overrightarrow{MC_1}=\dfrac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{CA'}\quad(4)$

$\overrightarrow{MD_1}=\dfrac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{DA'}\quad(5)$

Mặt khác chiếu các vec tơ trong (1) lên mặt phẳng (BCD) theo phương AA' tì thu được $y\overrightarrow{A'B}+z\overrightarrow{A'C}+t\overrightarrow{A'D}=\vec{0}$. Vậy từ $(3),(4),(5)$ ta có

$\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MD_1}=\dfrac{1}{x+y+z+t}\left(y\overrightarrow{BA'}+z\overrightarrow{CA'}+t\overrightarrow{DA'}\right)=\vec{0}$, hay M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

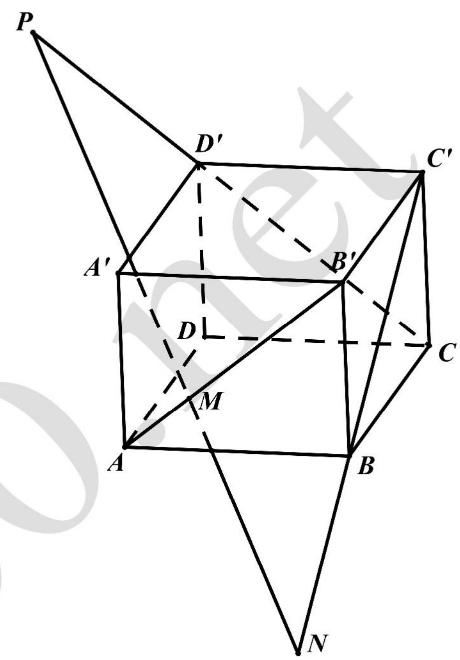
12. Do tứ diện $ABCD$ có $BC=DA=a,CA=DB=b,AB=DC=c$ nên $\Delta BCD=\Delta ADC=\Delta DAB=\Delta CBA$. Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S=4S'=\dfrac{abc}{R}$, nên bất đẳng thức cần chứng minh $\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{1}{b^2c^2}+\dfrac{1}{c^2a^2}\le\dfrac{9}{S^2}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le 9R^2$.

Theo công thức Leibbnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + BC^2 + 3MG^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 9MG^2\right)$$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được $9R^2 = aa^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

13. Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.



Từ giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AN} = \vec{b} + \frac{x}{x-1}\left(\vec{a} + \vec{c}\right) \quad (2)$$

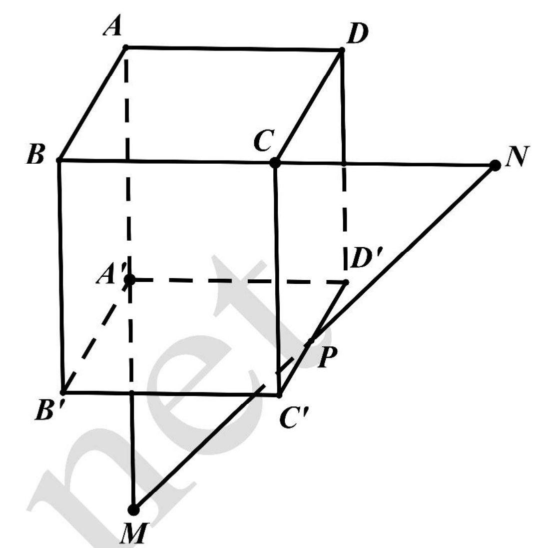
$$\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{y}{y-1}\left(\vec{c} - \vec{b}\right)(3)$$

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$$

$$= \frac{x}{x-1}\vec{a} - \frac{1}{k-1}\vec{b} + \left(\frac{x}{x-1} - \frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$$

$$+\left(\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}\right)\vec{c}.$$



$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-(\frac{y}{y-1}+\frac{1}{k-1})\vec{b}+\left(\frac{y}{y-1}-\frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

Ba điểm M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại λ sao cho $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MP}$ $(*)$.

Thay các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$ vào $(*)$ và lưu ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng ta tính được $x=\frac{1+k}{1-k},y=-\frac{1}{k}$.

14. Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Vì $M\in AA'$ nên $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AA'}=k\vec{c}$

$N\in BC\Rightarrow\overrightarrow{BN}=l\overrightarrow{BC}=l\vec{a}$, $P\in C'D'\Rightarrow\overrightarrow{C'P}=m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=-l\vec{a}-\vec{b}+k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'P}=(1-l)\vec{a}+m\vec{b}+\vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{NP}\Rightarrow-l\vec{a}-\vec{b}+k\vec{c}=2[(1-l)\vec{a}+m\vec{b}+\vec{c}]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-l=2(1-l)\\-1=2m\\k=2\end{cases}\Leftrightarrow k=2,m=-\frac{1}{2},l=2$. Vậy $\frac{MA}{MA'}=2$.

15. Goi $E = BP \cap CN, F = CM \cap AP$, $T = AN \cap BM$.

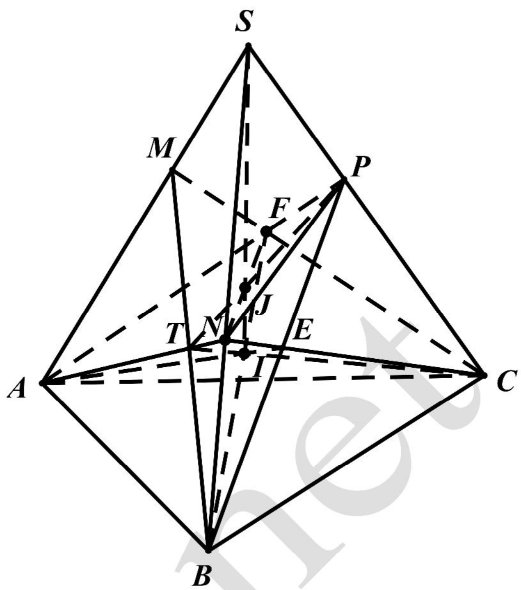
Trong (BCM) có $I = BF \cap CT$ trong (ANP) có $NF \cap PT = J$.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{Sp} = z\overrightarrow{PC}$

Ta có

$\overrightarrow{SM} = \dfrac{x}{x+1}\vec{a}, \overrightarrow{SN} = \dfrac{y}{y+1}\vec{b}, \overrightarrow{SP} = \dfrac{z}{z+1}\vec{c}$

$(x > 0, y > 0, z > 0)$.



Do $T = AN \cap BM$ nên

$$\begin{cases} T \in AN \\ T \in BM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ST} = \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{ST} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha x}{x+1}\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b} = \dfrac{\beta y}{y+1}\vec{b} + (1-\beta)\vec{a}$. Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha x}{x+1} = 1-\beta \\ \dfrac{\beta y}{y+1} = 1-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{x+y+1} \\ \beta = \dfrac{y}{x+y+1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{ST} = \frac{x}{x+y+1}\vec{a} + \frac{y}{x+y+1}\vec{b}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$$\overrightarrow{SE} = \frac{y}{y+z+1}\vec{b} + \frac{z}{y+z+1}\vec{c}, \quad \overrightarrow{SF} = \frac{z}{z+x+1}\vec{c} + \frac{x}{z+x+1}\vec{a}.$$

Làm tương tự như trên đối với hai giao điểm $I = BF \cap CT$ và $NF \cap PT = J$ ta được :

$$\overrightarrow{SI} = \frac{1}{x+y+z+1}\left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right), \quad \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{x+y+z+2}\left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{SJ} = \dfrac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\overrightarrow{SI} \Rightarrow \overrightarrow{SJ} = (x+y+z+1)\overrightarrow{IJ}$

Vậy S, I, J thẳng hàng và $\dfrac{SI}{IJ} = x+y+z+1 = \dfrac{SM}{MA} + \dfrac{SN}{NB} + \dfrac{SP}{PC} + 1$.