Đáp án chuyên đề:

Phép đối xứng trục - Hình học 11

9. a) $x-2y-5=0$ b) $x-2y+5=0$

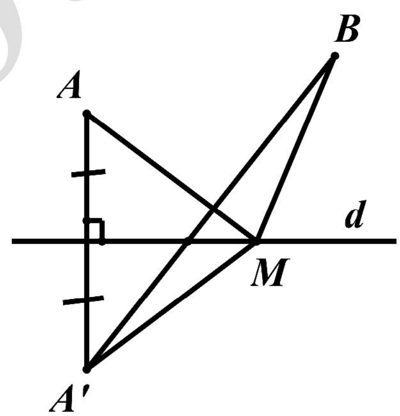
10.

a) $2x+y-3=0$ và $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

b) (C) có tâm $I(2;3)$, đường thẳng qua I vuông góc với d là $d_1: x+2y-8=0$. Giao điểm của $d \& d_1$ là $M\left(\frac{14}{5};\frac{13}{3}\right)$.

Gọi I' là ảnh của I qua phép đối xứng trục d thì M là trung điểm của $II' \Rightarrow I'\left(\frac{18}{5};\frac{11}{5}\right)$. Phương trình $(C'):\left(x-\frac{18}{5}\right)^2+\left(y-\frac{11}{5}\right)^2=4$.

11. a) Gọi A' đối xứng với A qua d, ta có $MA=MA' \Rightarrow MA+MB=MA'+MB \geq A'B$. Đẳng thức xảy ra khi M thuộc đoạn $A'B$ mà $M\in d \Rightarrow M=A'B\cap d$.



Vậy $\min(MA+MB)=A'B$ khi $M=A'B\cap d$.

b) Xét $M(x;y) \Rightarrow M\in d: x-2y+2=0$

và $A(3;5), B(5;7)$, ta có $T=MA+MB$.

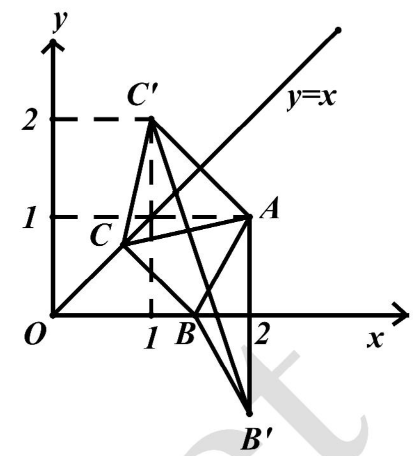
Do $(3-2.5+2)(5-2.7+2)>0$ nên A,B nằm cùng phía đối với d.

Gọi A' đối xứng với A qua d thì $A'(5;1)$. Phương trình $A'B: x-5=0$.

Ta có $MA+MB=MA'+MB\geq A'B=6$.

Đẳng thức xảy ra khi $M=A'B\cap d \Rightarrow M\left(5;\frac{7}{2}\right)$.

12. Gọi B',C' lần lượt là ảnh của A qua các phép đối xứng trục có trục là Ox,Oy, khi đó ta có $B'(2;-1)$, $C'(1;2)$.



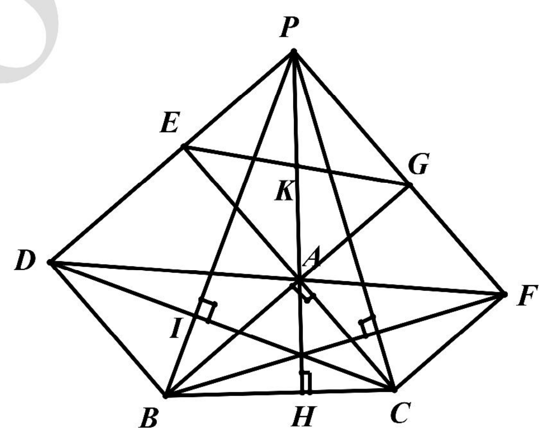
Ta có $AB=BB',AC=AC'$ nên chu vi tam giác ABC là $2p=AB+BC+CA$

$=AB'+BC+CC'\ge B'C'=\sqrt{10}$

Đẳng thức xảy ra khi B và C là các giao điểm của $B'C'$ với Ox và đường phân giác góc phần tư thứ nhất, từ đó không khó khăn gì ta tìm được $B'\left(\frac{5}{3};0\right)$ và $C'\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right)$.

13. a) Ta có $BAD=CAF=45^0\Rightarrow BAD+CAF+BAC=180^0$ suy ra D,A,F thẳng hàng.

Xét phép đối xứng $Đ_{DF}$ có:



$A\mapsto A,B\mapsto E,C\mapsto G$ nên tam giác ABC biến thành tam giác AEG, do đó $BCA=AGE$ mà $BCA=BAH$ mặt khác tam giác AGE vuông tại A có trung tuyến $AK\Rightarrow KA=KG$ nên ΔKAG cân tại $K\Rightarrow GAK=KAG$ suy ra $GAK=BAH$ mà hai góc này nằm ở vị trí đối đỉnh nên $K\in AH$.

b) Do K là trung điểm của EG và $AEPG$ là hình chữ nhật nên A,K,P thẳng hàng, hay $P\in AH$.

c) Dễ thấy $AP=EG$ mà $Đ_{DF}(BC)=EG\Rightarrow BC=EG$, $BC=AP$.

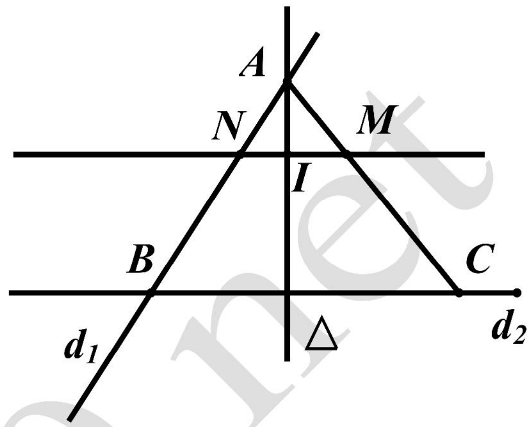
Lại có $BD=BA$, $DC=DG=BP\Rightarrow \Delta DBC=\Delta BAP\Rightarrow BPA=DCB$

Mà $BPH+PBH=90^0\Rightarrow ICB+IBC=90^0\Rightarrow CD\perp PB$.

Tương tự chứng minh được $BF \perp PC$ nên DC, BF, PH là các đường cao của tam giác PBC nên chúng đồng qui.

14. Giả sử đã dựng được các điểm A, B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi Δ là đường trung trực của BC thì $A = \Delta \cap d_1$; $Đ_{\Delta}(C) = B$ và $B = d_1 \cap d_2$ từ đó ta có cách dựng:

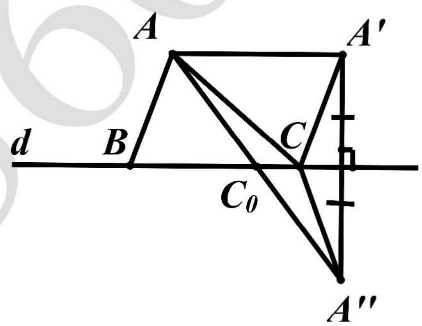


- Qua M dựng đường thẳng song song với d_2 cắt d_1 tại N.
- Qua trung điểm I của MN dựng đường thẳng $\Delta \perp d_2$.
- Dựng giao điểm $A = \Delta \cap d_1$.
- Gọi $C = AM \cap d_2$
- Dựng $Đ_{\Delta}(C) = B$

Các điểm A, B, C là các điểm cần dựng .

Bạn đọc tự chứng minh và biện luận.

15. Xét $T_{\vec{u}}$ với $\vec{u} // d$ và $|\vec{u}| = a$



Gọi $T_{\overrightarrow{BC}}(A) = A'$ và $A'' = Đ_d(A')$

Ta có $AB = A'C$ nên

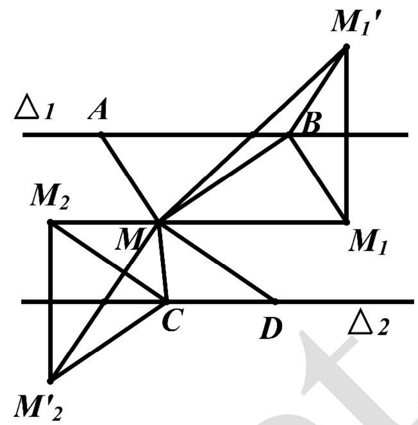
$AB + AC = AC + CA'$

$= AC + CA'' \geq AA''$

$\Rightarrow \min(AB + AC) = AA''$ khi

$C \equiv C_0 = AA'' \cap d$ và $B = T_{-\vec{u}}(C)$.

16. Giả sử các điểm A, B, C, D được sắp thứ tự như hình vẽ .



Gọi $M_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(M), M_2 = T_{\overrightarrow{DC}}(M)$

$M_1' = Đ_{\Delta_1}(M_1), M_2' = Đ_{\Delta_1}(M_2)$.

Khi đó ta có $MA = M_1B = M_1'B$,

$MD = M_2C = M_2'C$ do đó $MA + MB + MC + MD$
$= MB + M_1'B + MC + M_2'C$

$\geq MM_1' + MM_2'$.

Đẳng thức xảy ra khi $B = MM_1' \cap \Delta_1, C = MM_2' \cap \Delta_2$.

Vậy vị trí của các điểm như sau

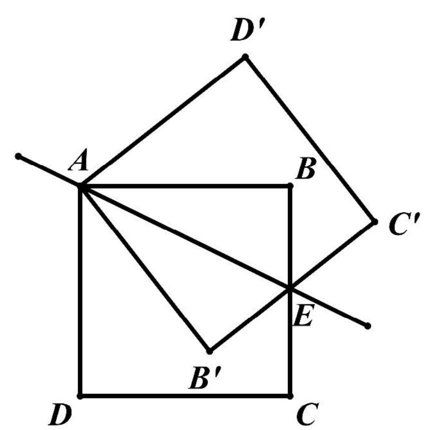
$B = MM_1' \cap \Delta_1, A = T_{\overrightarrow{BA}}(A)$,

$C = MM_2' \cap \Delta_2, D = T_{\overrightarrow{CD}}(C)$.

17. Gọi $E = BC \cap B'C'$.

Ta có $AB = AB', ABE = AB'E = 90^0$, AE chung nên $\Delta ABE = \Delta AB'E$

$\Rightarrow \begin{cases} AB = AB' \\ EB = EB' \end{cases} \Rightarrow AE$ là đường trung trực của BB'.

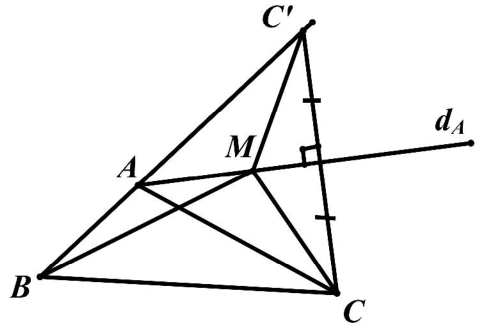


Xét phép đối xứng trục $Đ_{AE}$

Ta có $B \mapsto B'$, tương tự ta chứng minh được $C \mapsto C' \Rightarrow D \mapsto D'$.

Vậy phép đối xứng trục $Đ_{AE}$ biến hình vuông $ABCD$ thành hình vuông $AB'C'D'$.

18. Lấy điểm C' đối xứng với C qua đường phân giác d_A.



Khi đó A nằm giữa B và C'. Với mọi điểm $M \in d_A$ ta có $MC = MC'$, chu vi tam giác MBC là $MB + MC + BC$

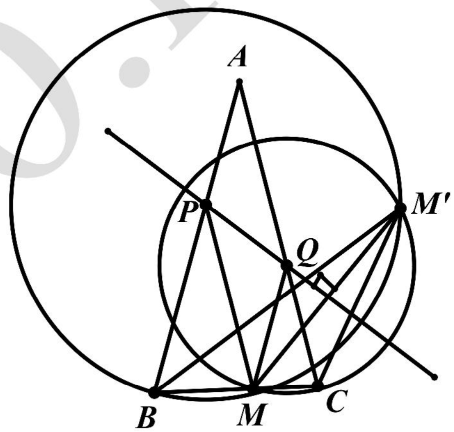
$= (MB + MC') + BC \geq BC' + BC$

Mà $BC' = BA + AC' = BA + AC$

$\Rightarrow MB + MC + BC \geq AB + BC + CA$ Vậy chu vi tam giác MBC không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

19.

Phần thuận: Gọi M' là ảnh của điểm M qua phép đối xứng trục PQ. Khi đó $PM' = PM$ (1)

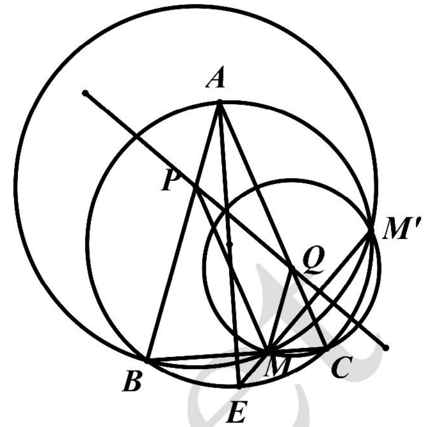


Mặt khác $PM // AC$ nên $ACB = PMB = BAC$ do đó tam giác PMB cân suy ra $PM = PB$ (2). Từ $(1),(2)$ ta có $PM' = PM = PB$ nên B, M, M' nằm trên đường tròn tâm P và ta có

$BM'C = \frac{1}{2}BPM = \frac{1}{2}BAC$ (3)

Tương tự ta có $QM' = QM = QC$ nên C, M, M' cùng nằm trên đường tròn tâm Q, do đó $MM'C = \frac{1}{2}MQC = \frac{1}{2}BAC$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $BM'C = BM'M + CM'M = BAC$. Do đó M' thuộc cung tròn BAC.

Phần đảo: Giả sử M' thuộc cung tròn BAC (trừ B,C). Gọi E là điểm chính giữa của cung BC không chứa A. Gọi $M = EM' \cap BC$, dựng hình bình hành $APMQ$ với $P \in AB, Q \in AC$. Ta cần chứng minh M và M' đối xứng nhau qua đường thẳng PQ.



Do P,M' nằm cùng phía với BM và $BM'M = BAE = \frac{1}{2}BAC = \frac{1}{2}BPM$ nên M' thuộc đường tròn tâm P bán kính PB.

Tương tự ta cũng chứng minh được M' thuộc đường tròn tâm Q bán kính QC. Mặt khác hai đường tròn này cùng đi qua điểm M do đó MM' là dây cung chung của hai đường tròn nên nó đối xứng qua đường thẳng nối hai tâm, hay M,M' đối xứng nhau qua PQ.

Vậy tập hợp điểm M' là cung BAC (trừ B,C).

20.

a) Với điểm D cố định trên cạnh BC

Gọi M,N lần lượt đối xứng với D qua AB, AC khi đó $ED = EM, DF = DN$ Chu vi tam giác DEF là $\zeta = DE + EF + FD = ME + EF + FN \geq MN$.

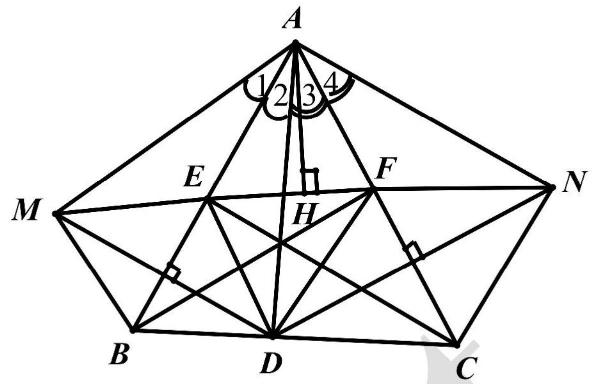
Vậy chu vi tam giác nhỏ nhất bằng MN, khi M,E,F,N thẳng hàng, E,F là giao điểm của MN với AB, AC.

b) Ứng với mỗi điểm D, chu vi tam giác DEF nhỏ nhất khi E,F nằm trên MN và $\min(\zeta) = MN$.

Vậy khi D di chuyển trên cạnh , chu vi tam giác DEF khi MN nhỏ nhất.

Ta có $MAN = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2.BAC$ (không đổi).

Tam giác AMN cân tại A có $MAN = 2.BAC$ không đổi nên MN nhỏ nhất khi AM, AN nhỏ nhất (vì $\frac{MN}{\sin MAN} = \frac{AN}{\sin AMN} = \frac{AM}{\sin ANM}$ mà $\sin MAN, \sin AMN, \sin ANM$ không đổi).



Lại có $AM = AN = AD$ nên AM, AN nhỏ nhất khi AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD \perp BC$ hay D là chân đường cao của tam giác ABC.

Bây giờ ta chứng minh E, F cũng là chân các đường cao của tam giác ABC. Dựng đường cao AH của tam giác AMN

ta có $MAH = BAC \Rightarrow EAH = BAC - A_1$,

tương tự $DAC = BAC - A_2$ mà $A_1 = A_2 \Rightarrow EAH = DAC \Rightarrow AEH = ACB$ mà $AEH = MAE = DEB$ nên $ACB = DEB$ do đó tứ giác $ACDE$ nội tiếp $\Rightarrow AEC = ADC = 90^0 \Rightarrow E$ là chân đường cao CE của tam giác ABC.

Tương tự F cũng là chân đường cao của tam giác ABC.

Trong trường hợp chu vi tam giác DEF nhỏ nhất này ta có $MN = 2AH = 2.AM\sin A = 2AD\sin A = 2h_a \sin A$

Mà $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}abch_a \sin A = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$\Rightarrow MN = \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

Vậy chu vi tam giác DEF nhỏ nhất là $\frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.