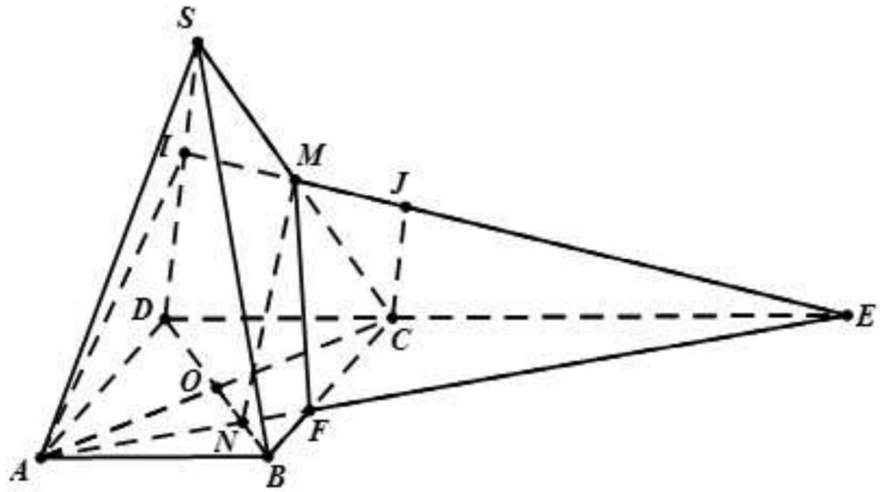
Đáp án chuyên đề: Phép chiếu song song. Hình biểu diễn của một hình trong không gian - Hình học 11

61.



a) Gọi $E = AN \cap CD, F = AN \cap BC$ và $I = EM \cap SD$ thì $I = SD \cap (AMN)$.

b) Ta có $BF /\!/ AD \Rightarrow \frac{BF}{AD} = \frac{NB}{ND} = \frac{1}{3}$. Từ $\frac{BF}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FC}{AD} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{FC}{AD} = \frac{2}{3}$.

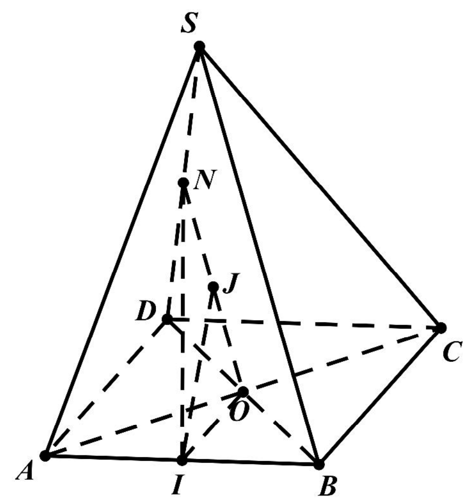
Kẻ $CJ//SD, J \in EI$. Ta có $\frac{MC}{MS} = \frac{CJ}{IS}; \frac{ID}{CJ} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{IS}{ID} = \frac{MS}{MC}.\frac{EC}{ED} = \frac{2}{3}$

Vậy $\frac{IS}{ID} = \frac{2}{3}$.

62. Ta có $ON /\!/ SB \subset (SBC)$

$\Rightarrow ON /\!/ (SBC)$ (1).

Tương tự $ON//BC \subset (SBC) \Rightarrow ON /\!/ (SBC)$ (2) Từ $(1),(2)$ suy ra $(ONI) /\!/ (SBC)$ mà $IJ \subset (ONI) \Rightarrow IJ /\!/ (SBC)$.



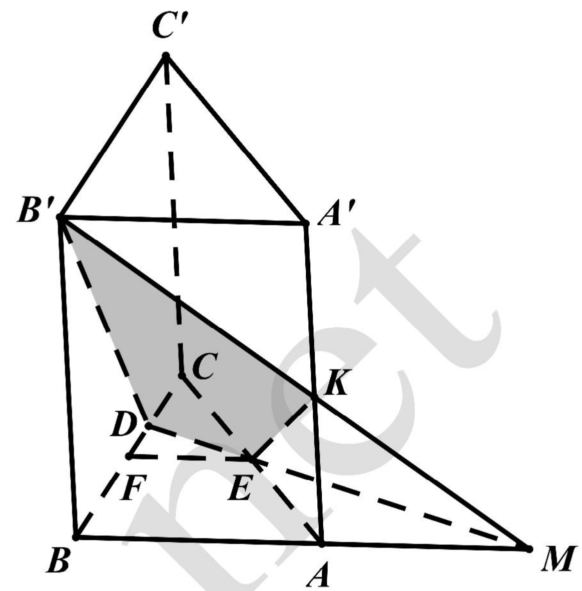
63. a) Trong $(ABB'A')$ gọi $K = MB' \cap AA'$. Trong (ABC) gọi $D = ME \cap CB$.

Thiết diện là tứ giác $DEKB'$.

b) Kẻ $EF // AB\left(F \in CB\right)$. Khi đó EF là đường trung bình của tam giác ABC và $EF = \frac{AB}{2}$.

Xét tam giác DBM ta có

$\frac{FD}{BD} = \frac{EF}{BM} = \frac{1}{3} \Rightarrow FD = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}FC$, tức D là trung điểm của FC do đó $\frac{BD}{CD} = 3$.



64.

a) Trong $\left(ABC\right)$ gọi $E = AC \cap NP$, trong $\left(ACD\right)$ gọi $Q = EM \cap CD$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q \in CD \\ Q \in EM \subset \left(MNP\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow Q = CD \cap \left(MNP\right)$.

b) Kẻ $AF // CD, F \in AD$, kẻ $KP // AN, K \in AC$.

Ta có $\frac{AF}{DQ} = \frac{MA}{MD} = 1 \Rightarrow AF = DQ \ \left(1\right)$,

$\frac{AF}{QC} = \frac{EA}{EC} \ \left(2\right)$

Do $KP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.3AN = \frac{3}{2}AN$ nên

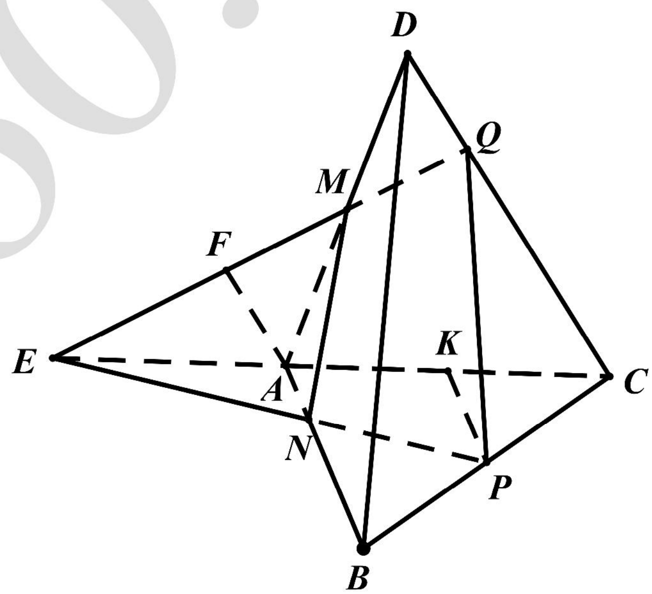
$\frac{AN}{KP} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{EA}{EK} = \frac{AN}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2} \ \left(3\right)$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right),\left(3\right)$ suy ra

$\frac{QD}{QC} = \frac{FA}{QC} = \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{QD}{DC} = \frac{1}{3}$.



65.

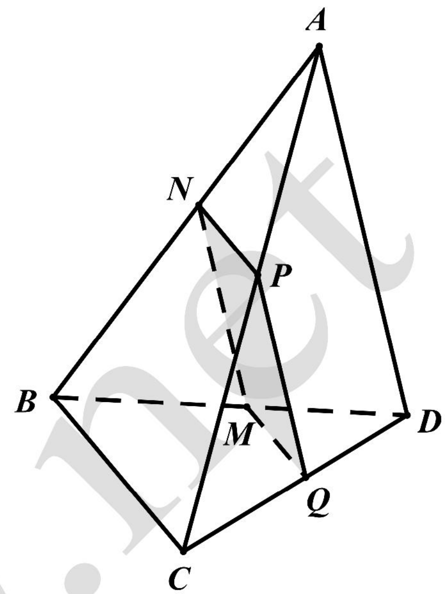
a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABD) \\ AD \subset (ABD) \\ AD \,//\, (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN \,//\, AD, N \in AB$.

Tương tự $(\alpha) \cap (ABC) = NP \,//\, BC, P \in AC$.

$(\alpha) \cap (BCD) = MQ \,//\, BC, Q \in CD$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.



b) Giả sử có điểm M trên cạnh BD để $MNPQ$ là hình thoi.

Ta có $\frac{MQ}{BC} = \frac{DM}{DB} \Rightarrow MQ = \frac{DM.BC}{DB}$ (1)

Tương tự $\frac{MN}{AD} = \frac{MB}{BD} \Rightarrow MN = \frac{MB.AD}{BD}$ (2)

Do $MNPQ$ là hình bình hành nên nó là hình thoi khi $MN = MQ$, do đó từ (1) và (2) ta có

$$\frac{DM.BC}{DB} = \frac{AD.MB}{BD} \Rightarrow DM.BC = DA(DB - DM)$$

$$\Leftrightarrow DM(BC + AD) = AD.BD \Leftrightarrow DM = \frac{AD.BD}{BC + AD}.$$

Rõ ràng $0 < DM = \frac{AD.BD}{BC + AD} < BD$ nên điều kiện M nằm trên BD được thỏa mãn.

Vậy thiết diện là hình thoi khi M nằm trên cạnh BD sao cho $DM = \frac{AD.BD}{BC + AD}$.

c) Ta có $\frac{MQ}{BC} = \frac{MD}{DB}, \frac{MN}{DA} = \frac{MB}{DB} \Rightarrow \frac{MQ}{BC} + \frac{MN}{AD} = \frac{MD + MB}{DB} = 1$

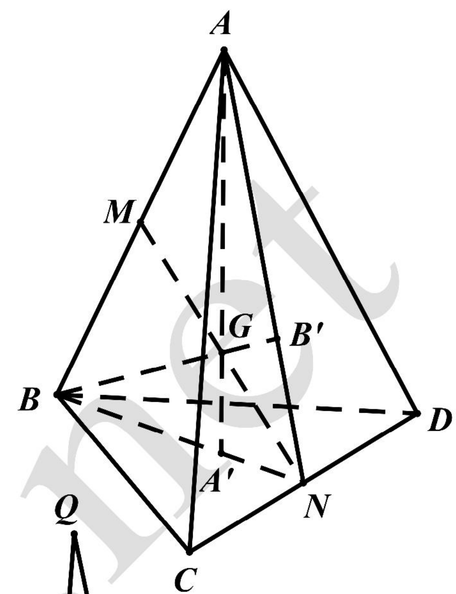
Vì $MQ \,//\, BC, MN \,//\, AD$ mà BC, AD không đổi nên góc giữa MN và MQ không đổi, do đó $S_{MNPQ} = MN.MQ\sin\varphi$ (trong đó φ là góc giữa MN và MQ). Ta thấy $\sin\varphi$ không đổi và

$$S_{MNPQ} = MN.MQ\sin\varphi = (AD.BC\sin\varphi).\frac{MN}{AD}.\frac{MQ}{BC}$$

$$\le AD.BC\sin\varphi\left(\frac{\frac{MN}{AD} + \frac{MQ}{BC}}{2}\right)^2 = \frac{AD.BC\sin\varphi}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{MN}{AD} = \frac{MQ}{BC} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow M$ là trung điểm của BD.

Vậy thiết diện thiết diện lớn nhất bằng $\dfrac{AD.BC\sin\varphi}{4}$ khi M là trung điểm của BD.

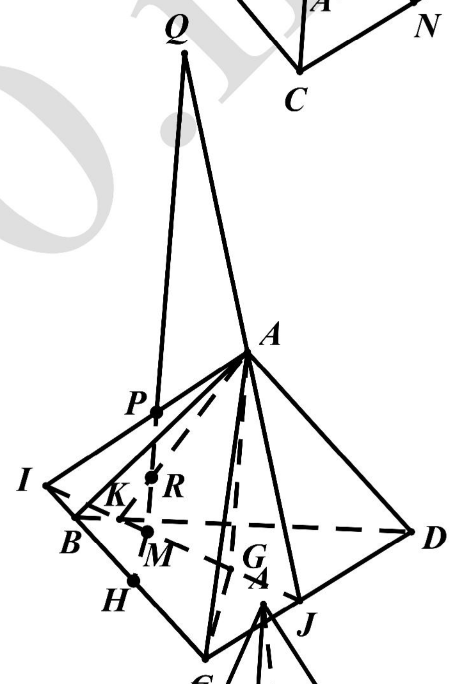


66.

a) Gọi N là trung điểm của cạnh CD, thì ta dễ thấy $A'\in BN$ và $B'\in AN$ do đó trong (ABN), AA' và BB' cắt nhau tại điểm G.

Tương tự chứng minh được các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đôi một cắt nhau, mà bốn đường thẳng đôi một cắt nhau thì chúng đòng quy.

b) Dễ dàng chứng minh được G là trung điểm của MN và từ đó ta có bảy đường thẳng $AA', BB', CC', DD', MN, PQ, RS$ đồng quy tại G.



67. a) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của MG với BC, CD, BD, kẻ $MH // GC, H\in BC$ thì ta có:

Ta có $\dfrac{MP}{AG}=\dfrac{IG}{IJ}=\dfrac{IH}{GC}=\dfrac{S_{MBC}}{S_{GBC}}=\dfrac{3S_{MBC}}{S_{BCD}}$

Tương tự $\dfrac{MQ}{AG}=\dfrac{3S_{MCD}}{S_{BCD}}, \dfrac{MR}{AG}=\dfrac{3S_{MBD}}{S_{BCD}}$

Từ đó ta có

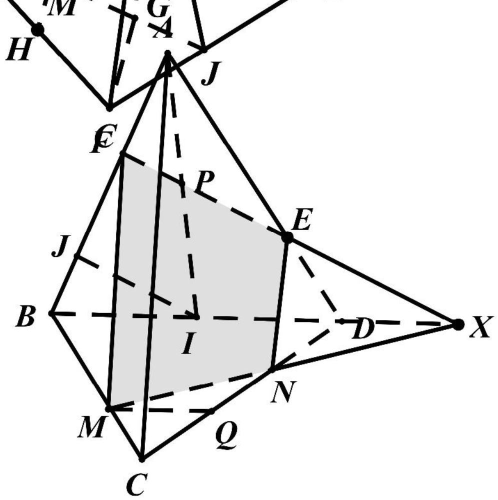
$MP+MQ+MR=3AG$.

b) Theo BĐT Cauchy ta có

$$MP.MQ.MR\le\left(\frac{MP+MQ+MR}{3}\right)^3=AG^3$$

Đẳng thức xảy ra khi

$MP=MQ=MR=AG\Leftrightarrow M\equiv G$



68. Cọi $X=MN\cap BD$, $E=XP\cap AD$, $F=XP\cap AB$. Thiết diện là tứ giác $MNEF$.

Dựng $MQ // BD$, $Q\in CD$.

Ta có $\dfrac{CQ}{CD}=\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow N$ là trung điểm của QD do đó $DX=MQ$

$\dfrac{DX}{DB}=\dfrac{MQ}{DB}=\dfrac{1}{3}$.

Dựng $IJ // XF, J\in AB$. Ta có

$\dfrac{AF}{FJ}=\dfrac{AP}{AI}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow AF=\dfrac{4}{5}FJ \quad (1)$

$\frac{BF}{JF}=\frac{BX}{IX}=\frac{BX}{ID+DX}=\frac{BX}{\frac{1}{2}BD+\frac{1}{3}BD}=\frac{6BX}{5BD}=\frac{6}{5}.\frac{BX}{\frac{3}{4}BX}=\frac{8}{5}\Rightarrow JF=\frac{5}{8}BF\ (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $AF=\frac{4}{5}FJ=\frac{4}{5}.\frac{5}{8}FB=\frac{1}{2}FB\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{1}{3}$

Do $\frac{CM}{CB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{FA}{AB}=\frac{CM}{CB}=\frac{1}{3}\Rightarrow FM\,//\,AC\Rightarrow AC\,//\,(MXF)$.

$\Rightarrow MF\,//\,NE$. Vậy thiết diện $MNEF$ là hình thang cân có $MF=\frac{2a}{3},NF=\frac{a}{3}$;

ΔAFE có $AF=\frac{a}{3},AE=\frac{2a}{3}$.

$EF^2=AE^2+AF^2-2AE.AF\cos 60^0=\frac{a^2}{9}\Rightarrow EF=\frac{a}{3}$.

Đường cao của hình thang là $h=\sqrt{EF^2-\left(\frac{FM-EN}{2}\right)^2}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$

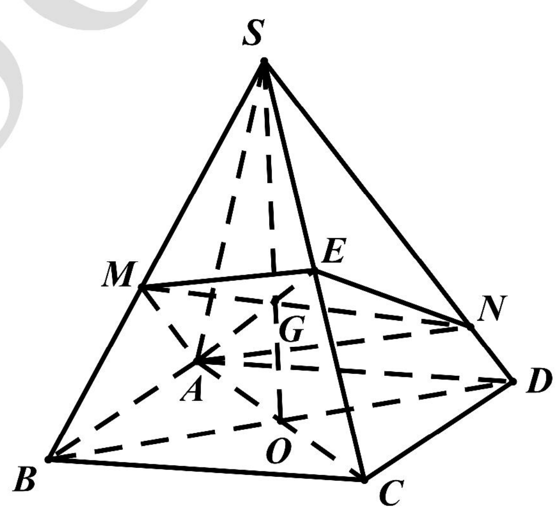
Diện tích thiết diện $S=\frac{1}{2}h(MF+NE)=\frac{11a^2}{24\sqrt{3}}$.

69. $\frac{MA}{MC'}=2$.

70. Gọi $O=AC\cap BD,G=AE\cap SO$, thì G là trọng tâm của tam giác SAC

Dễ thấy $G\in MN$.

Ta có $\frac{S_{\Delta SGM}}{S_{\Delta SOB}}=\frac{SG.SM}{SO.SB}=\frac{2}{3}\frac{SM}{SB}$



$\frac{S_{\Delta SGN}}{S_{\Delta SOD}}=\frac{SG.SN}{SO.SD}=\frac{2}{3}\frac{SN}{SD}$

$\Rightarrow\frac{S_{SMG}}{S_{SOB}}+\frac{S_{SNG}}{S_{SOD}}=\frac{2}{3}\left(\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SB}\right)$

Mặt khác

$\frac{S_{SMG}}{S_{SOB}}+\frac{S_{SNG}}{S_{SOD}}=\frac{2S_{SMG}}{S_{SBB}}+\frac{2S_{SNG}}{S_{SBD}}$

$=\frac{2S_{SMN}}{S_{SBD}}=\frac{2SM.SN}{SB.SD}$

Suy ra $\frac{1}{3}\left(\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}\right)=\frac{SM.SN}{SB.SD}\Leftrightarrow\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3\quad(*)$

$\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}=\frac{1}{3}\left(\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}\right)\left(\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}\right)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{SM.SD}{SN.SB}+\frac{SN.SB}{SM.SD}\right)$

Đặt $a=\frac{SB}{SM},b=\frac{SD}{SN}$ thì $a+b=3$ và $\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}=\frac{1}{3}\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

Do $a \geq 1, b \geq 1$ và $a + b = 3$ nên ta có $a \in [1;2]$, từ đó .

Ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{3-a} + \frac{3-a}{a} = \frac{9-6a+2a^2}{a(3-a)} \leq \frac{5}{2}, \forall a \in [1;2]$

$\Rightarrow \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \leq \frac{1}{3}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Vậy $\max(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD}) = \frac{3}{2}$ khi $M \equiv B$, N là trung điểm của SD hoặc $N \equiv D$, M là trung điểm của SB.