

Đáp án chuyên đề: Khoảng cách - Hình học 11

64.

a) Do $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OI$

Lại có $OB = OC$ và I là trung điểm của BC nên $OI \perp BC$. Vậy OI là đoạn vuông góc chung của OA và BC .

$$OI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

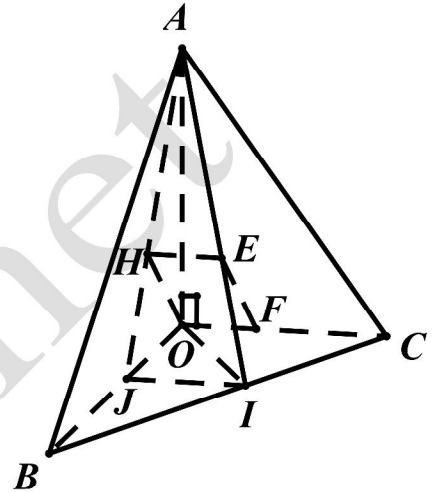
b) Gọi J là trung điểm của OB thì mặt phẳng (AIJ) chứa AI và song song với OC . Hạ $OH \perp AJ, H \in AJ$.

Ta có $\begin{cases} IJ \parallel OC \\ OC \perp (OAB) \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (OAB) \Rightarrow IJ \perp OH$ vì vậy

$OH \perp (AIJ)$. Từ H kẻ đường thẳng song song với IJ cắt AI tại E , từ E kẻ đường thẳng song song với OH cắt OC tại F thì EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC .

Trong tam giác OAJ có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $EF = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.



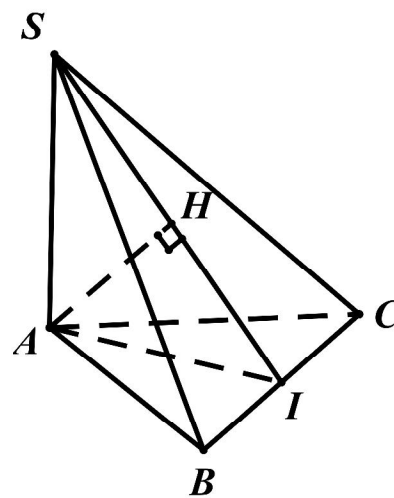
65. Gọi I là trung điểm của BC . Do tam giác ABC đều nên $AI \perp BC$, mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow (SAI) \perp (SBC)$ do đó hạ $AH \perp SI$ tại H thì $AH \perp (SBC)$.

Vậy $d(A, (SBC)) = AH$.

Ta có $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ suy ra

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Hay $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

66. Chứng minh được AB, AC, AD đôi một vuông góc, từ đó tính được

$$d(A, (DBC)) = \frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

67. Gọi O là trung điểm của CD
Ta có $(P) \perp (Q)$ và $\Delta = (P) \cap (Q)$, mà

$$AC \perp \Delta$$

$$\Rightarrow AC \perp (Q) \Rightarrow AC \perp AD \Rightarrow \Delta ACD$$

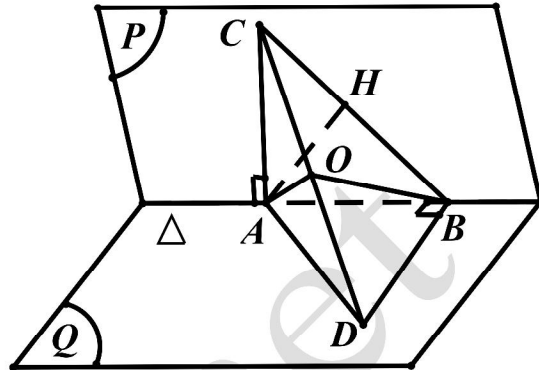
vuông tại $A \Rightarrow OA = OC = OD$.

Tương tự ΔBCD vuông tại B

$$\Rightarrow OB = OC = OD.$$

Vậy $OA = OB = OC = OD$.

Hạ $AH \perp CB$ thì $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD)$ do đó $d(A, (BCD)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



68. Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)

$$\text{Hạ } HM \perp AB, HN \perp AC.$$

Xét hai tam giác vuông AMD và AND có AD chung, $MAD = NAD = 60^\circ$ nên

$$\Delta MAD = \Delta NAD \Rightarrow DM = DN \Rightarrow HM = HN$$

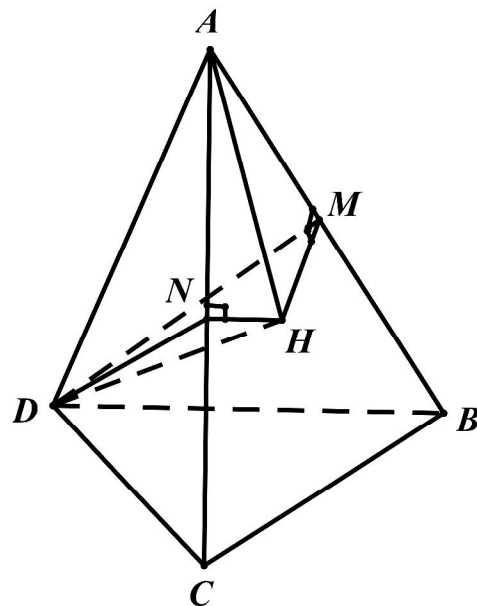
do đó AH là đường phân giác góc A của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } AM = AD \cos 60^\circ = \frac{c}{2}.$$

$$AH = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c\sqrt{3}}{3}.$$

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(D, (ABC)) = \frac{c\sqrt{6}}{3}.$$



69. Kẻ $AI \perp BC, I \in BC$, ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Kẻ $AH \perp SI$ thì $\begin{cases} AH \perp SI \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Vậy $d(A, (SBC)) = AH$.

Ta có $\angle ABI = 60^\circ$, $AI = AB \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}$$

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{3a}{2}$.

70. Gọi N là trung điểm của BB' ; ta có

$\begin{cases} B'C \parallel MN \\ MN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$ do đó

$d(AM, B'C) = d(B', (AMN))$. Mặt khác N

là trung điểm của BB' nên

$d(B', (AMN)) = d(B, (AMN))$

Kẻ $BI \perp AM$ thì $AM \perp (BNI)$, kẻ

$BH \perp NI \Rightarrow BH \perp (AMN)$ nên

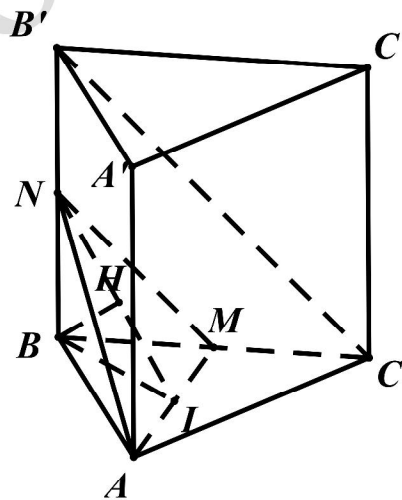
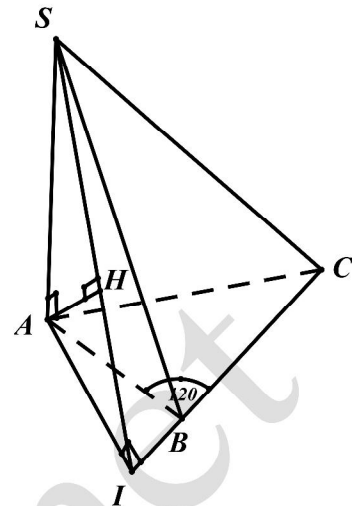
$d(B, (AMN)) = BH$.

Ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BI^2}$

$$= \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{7}{a^2}$$

$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{7}}{7}$. Vậy $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Cách 2. Kẻ $BI \perp AM$ thì $(IBB') \perp AM$, kẻ $CK \parallel AM$ thì $CK \perp (IBB')$



Xét phép chiếu vuông góc lên (IBB') thì ta có $B'K$ là hình chiếu của $B'C$ trên (IBB') nên $d(AM, B'C) = d(I, B'K)$.

Hạ $IH \perp B'K, H \in B'K$, ta có

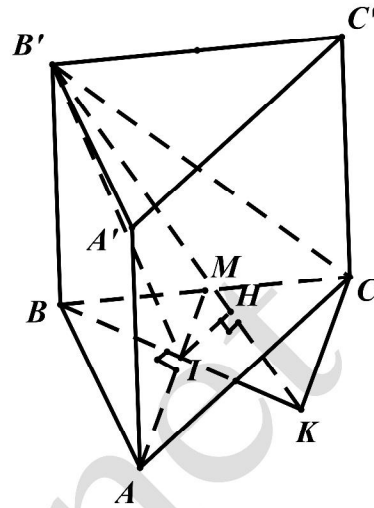
$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Để thấy $BK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ và

$$B'K = \sqrt{BK^2 + BB'^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{5} + 2a^2} = a\sqrt{\frac{14}{5}}.$$

Ta có $\Delta KHI \sim \Delta KBB' \Rightarrow \frac{IH}{BB'} = \frac{IK}{B'K}$
 $\Rightarrow IH = \frac{IK \cdot BB'}{B'K} = \frac{a\sqrt{5}}{5} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{a\sqrt{14}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$

Vậy $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$



71. Gọi I là trung điểm của AD

, thế thì $IA = ID = IC = \frac{AD}{2}$ nên

ΔACD vuông tại C
 $\Rightarrow CD \perp AC$ (1)

Lại có $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SA \perp CD$ (2). Từ (1), (2) suy

ra $CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$, hay tam giác SCD vuông tại C .

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng

cách từ B, H đến (SCD) .

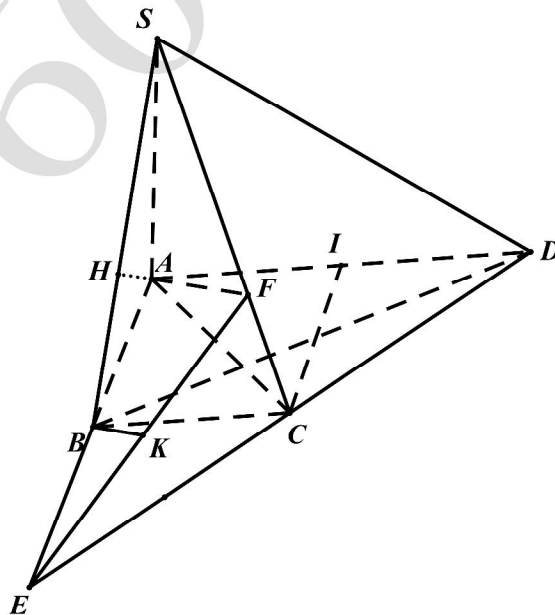
Ta có

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{SH \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$$

$$d_2 = \frac{2}{3}d_1.$$

Kẻ $AF \perp SC$ thì dễ thấy $AF \perp (SCD)$, kẻ $BK \parallel AF, K \in EF$ thì $d_1 = BK$.

Gọi $E = AB \cap CD$.



Ta có $\frac{BK}{AF} = \frac{EB}{EA} = \frac{1}{2} \Rightarrow BK = \frac{1}{2}AF$.

Mặt khác, trong tam giác vuông SAC ta có

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AF = a$$

$$\Rightarrow KB = \frac{a}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{a}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$$

Vậy $d(H, (SCD)) = d_2 = \frac{a}{3}$.

Lưu ý: Có thể tính khoảng cách từ H đến (SCD) theo cách

khác như sau:

Gọi $E = AB \cap CD, K = AH \cap SE$

Dễ thấy B là trung điểm của

AE và $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$ nên H là trọng

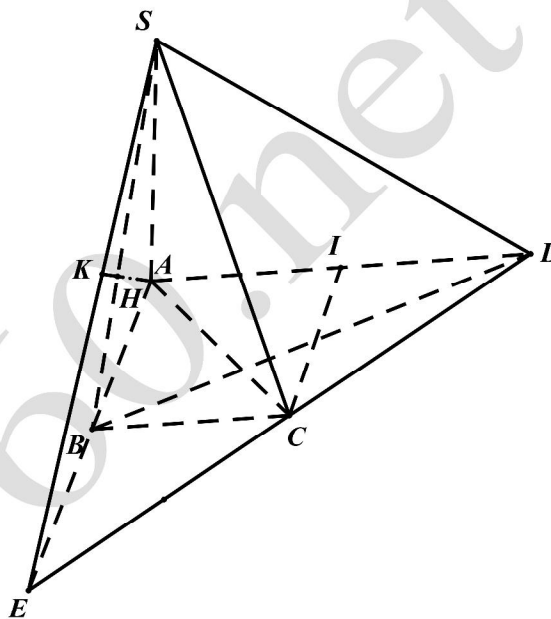
tâm của tam giác ASE.

Ta có $\frac{d(H, (SCD))}{d(A, (SCD))} = \frac{KH}{KA} = \frac{1}{3}$

Tứ diện ABES có AB, AE, AS
đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(A, (SCD))} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = a \Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{a}{3}$$



72. Gọi E là trung điểm của BC, ta có

$$\begin{cases} BC \perp HE \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHE)$$

$\Rightarrow (SHE) \perp (SBC)$. Do đó $IK \perp SE$ thì

$$IK \perp (SBC) \Rightarrow IK = b.$$

$$\text{Ta có } \triangle SKI \sim \triangle SHE \Rightarrow \frac{IK}{HE} = \frac{SK}{SH}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{HE \cdot SK}{IK} \quad (*), \text{ mà}$$

$$HE = \frac{a}{2}, IK = b, SK = \sqrt{SI^2 - IK^2} = \sqrt{\frac{SH^2}{4} - b^2}$$

nên

$$(*) \Leftrightarrow SH = \frac{a}{2b} \sqrt{\frac{SH^2}{4} - b^2} \Leftrightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}.$$

$$\text{Vậy } SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}.$$

73. a) Gọi $I = HO \cap CD \Rightarrow \frac{d(O, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{OI}{HI} = \frac{1}{2}$

Tam giác ABC đều nên $CH \perp AB$ mà $AB \parallel CD \Rightarrow CH \perp CD$.

Mặt khác $CD \perp SH$ do đó $CD \perp (SHC)$, kẻ

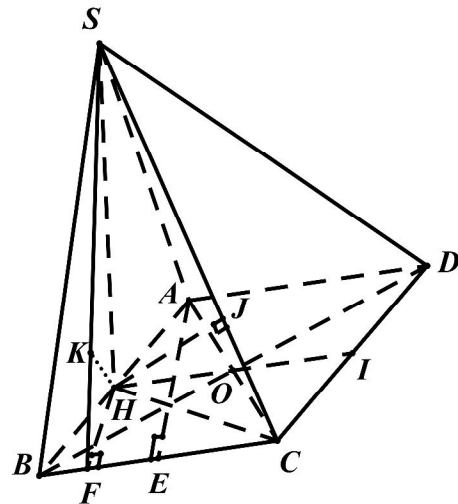
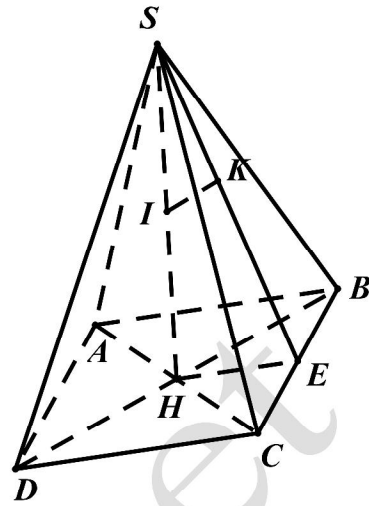
$$HJ \perp SC, J \in SC \Rightarrow HJ \perp (SCD)$$

$$\Rightarrow d(H, (SCD)) = HJ.$$

Ta có $HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, trong tam giác SHC có

$$\begin{aligned} \frac{1}{HJ^2} &= \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HS^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow HJ = a\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow d(O, (SCD)) = \frac{1}{2}d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{14}$$



Để thấy $OC = \frac{a}{2}, OI = \frac{CN}{2} = \frac{a}{4}, OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên

$$\frac{1}{d^2(O, (ACN))} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{64}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(O, (ACN)) = \frac{a\sqrt{3}}{8} \quad (5).$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5) ta có $d(B'M, CN) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

75.

a) Ta có $AO \cap (SBC) = C$ nên $\frac{d(A, (SBC))}{d(O, (SBC))} = \frac{CA}{CO} = 2 \quad (1)$

Mặt khác dễ thấy tứ diện $OBSC$ có các cạnh OB, OC, OS đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(O, (SBC))} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OS^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{19}{12} \Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

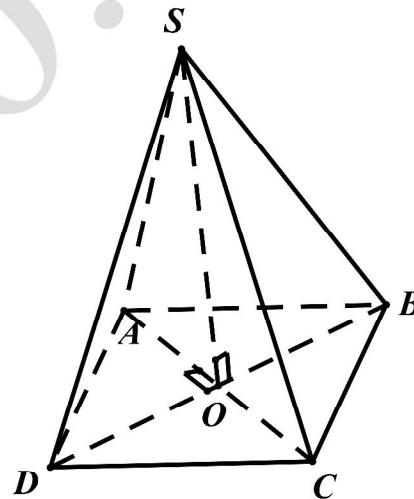
b) Ta có (SCD) là mặt phẳng chứa SD và song song với AB vì vậy

$$d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(B, (SCD))$$

Tương tự như câu a) ta có

$$d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) \text{ mà}$$

$$d(O, (SCD)) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}, \text{ hay } d(AB, SD) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$



76.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Xét hai tam giác ACD và BCD có CD chung $AC = BD, AD = BC$ nên

$\triangle ACD = \triangle BCD$, mà M là trung điểm của AB nên $MN \perp AB$.

Lí luận tương tự ta cũng có $MN \perp CD$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD, do đó $d(AB, CD) = MN$.

$$\text{Ta có } AN^2 = \frac{AC^2 + AD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

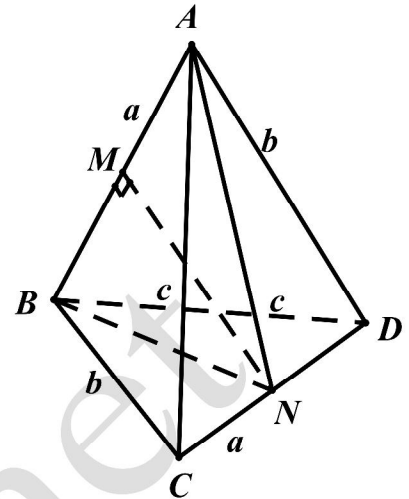
$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}, \text{ hay}$$

$$d(AB, CD) = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

Tính tương tự ta có :

$$d(AD, BC) = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}, \quad d(AC, BD) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$



77. Gọi P là trung điểm của SA.

Ta có MP là đường trung bình của $\triangle EAD \Rightarrow MP \parallel AD \Leftrightarrow MP \parallel BC$.

Do đó $MP \parallel NC$ nên MPCN là hình bình hành $\Rightarrow MN \parallel CP$.

Mặt khác ABCD là hình chóp đều nên dễ dàng chứng minh được $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CP$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} MN \parallel CP \\ BD \perp CP \end{cases} \Rightarrow MN \perp BD.$$

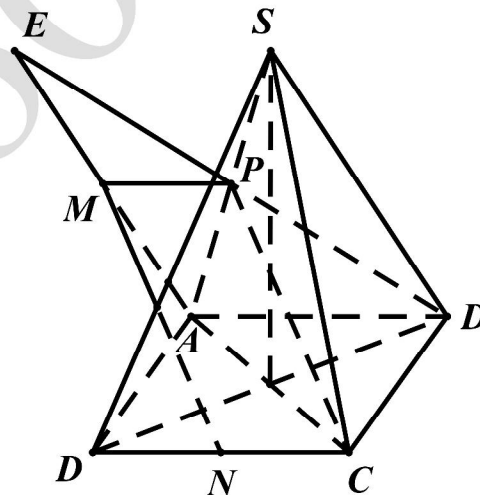
Ta có (SAC) là mặt phẳng chứa AC

và song song với MN nên

$$d(MN, AC) = d(N, (SAC))$$

$$= \frac{1}{2} d(B, (SAC)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$



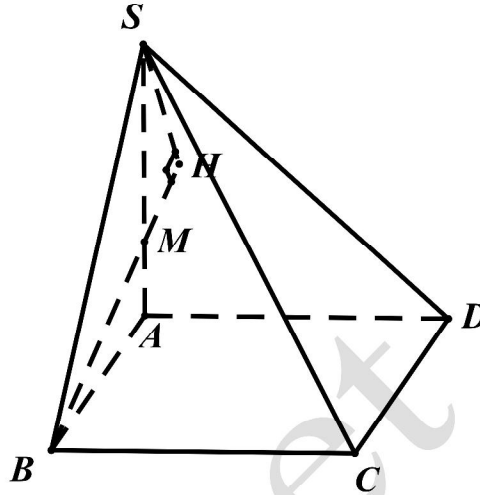
78. Kẻ $SH \perp BM$. Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SH$$

Lại có $\begin{cases} SH \perp BM \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (MBC)$.

Vậy $d(S, (MBC)) = SH$.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SB, (ABCD)) = \angle SBA = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$



$$MB = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Dễ thấy $\triangle MHS \sim \triangle MAB$ nên

$$\frac{MH}{MA} = \frac{MS}{MB} \Rightarrow HM = \frac{MS \cdot MA}{MB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$BH = BM + MH = \frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$$

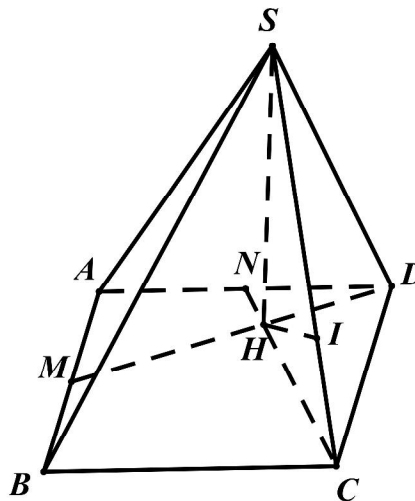
Vậy $d(S, (BCM)) = a$.

79. Ta có $\begin{cases} DM \perp CN \\ DM \perp SH \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SCN)$

$\Rightarrow DM \perp SC$. Gọi I là hình chiếu của H trên SC thì HI là đoạn vuông góc chung của SC và DM nên $d(DM, SC) = HI$.

Tứ giác AMHN nội tiếp nên

$$\begin{aligned} DH \cdot DM &= DN \cdot DA \Rightarrow DH = \frac{DN \cdot DA}{DM} \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{AM^2 + AD^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$



$$\text{Ta có } HC^2 = DC^2 - DH^2 = a^2 - \frac{a^2}{5} = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow HC = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \text{Tam giác SCH vuông tại H và có đường cao HI nên } \frac{1}{HI^2} &= \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2} \\ &= \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow HI = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } d(DM, SC) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

80. Áp dụng định lí cô sin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{7}.$$

$$\text{Ta có } BM = \sqrt{BC^2 + MC^2} = 2a\sqrt{3}, A'B = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = a\sqrt{21}$$

$A'M = \sqrt{A'C^2 + C'M^2} = 3a$, từ đó ta có $MB^2 + MA'^2 = 21a^2 = A'B^2$ nên tam giác $MA'B$ vuông tại M hay $MB \perp MA'$. Kẻ $BI \perp AC$ tại I.

$$\text{Gọi } N = A'N \cap AC, \text{ ta có } IA \cap (A'BM) = N \text{ nên } \frac{d(A, (A'BM))}{d(I, (A'BM))} = \frac{NA}{NI}$$

$$\text{Ta có } AN = 2AC = 4a, AI = AB \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \text{ nên } IN = IA + AN = \frac{a}{2} + 4a = \frac{9a}{2},$$

do đó

$$\frac{d(A, (A'BM))}{d(I, (A'BM))} = \frac{4a}{\frac{9a}{2}} = \frac{8}{9}$$

Để thấy $BI \perp (ACC'A') \Rightarrow BI \perp A'M$

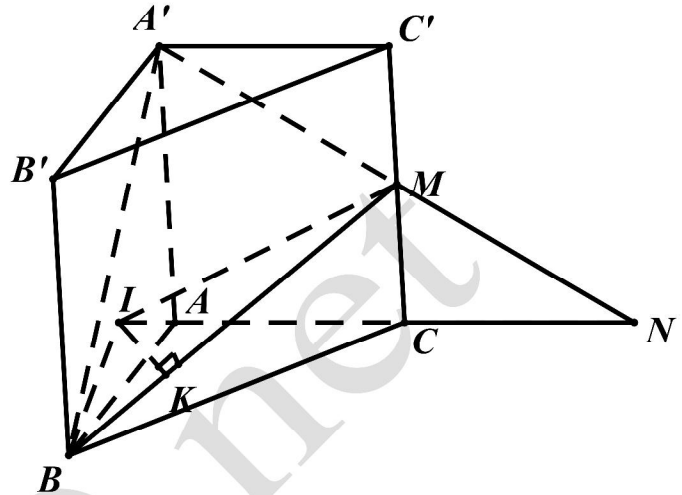
$$, \text{ vậy } \begin{cases} A'M \perp BI \\ A'M \perp MB \end{cases} \Rightarrow A'M \perp (IMB)$$

$(IBM) \perp (A'BM) = BM$ nên kẻ

$IK \perp BM$ thì $IK \perp (A'BM)$.

Vậy $d(I, (A'BM)) = IK$.

Ta có



$$IM = \sqrt{IC^2 + CM^2} = \sqrt{\left(\frac{5a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{2}$$

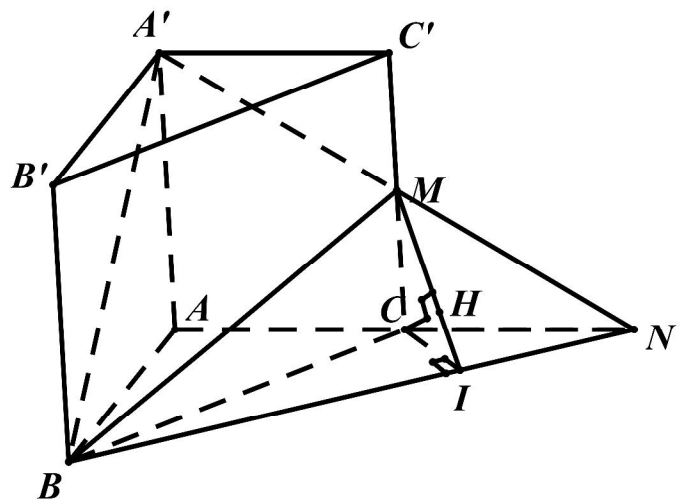
$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IM^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{45a^2} = \frac{64}{45a^2} \Rightarrow IK = \frac{3a\sqrt{5}}{8}$$

$$\text{Do đó } d(A, (A'BM)) = \frac{8}{9} \cdot \frac{3a\sqrt{5}}{8} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

Lưu ý: Có thể sử dụng $\frac{d(A, (A'BM))}{d(C, (A'BM))} = \frac{NA}{NC}$ dựng như hình vẽ cũng tính

được khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.

81.



a) Ta có
$$\begin{cases} (ABB'A') \parallel (CDD'C') \\ (A'MB) \cap (ABB') = A'M \Rightarrow A'M \parallel CN \\ (A'MB) \cap (CDD'C') = CN \end{cases}$$

Tương tự $CM \parallel A'N$, do đó $A'MCN$ là hình bình hành.

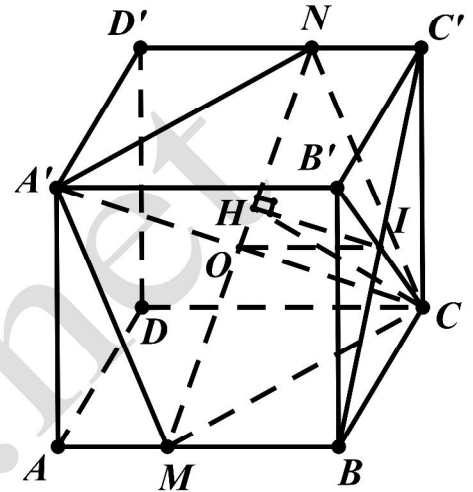
Để thấy $CB' \perp (ABC'D')$ mà $MN \subset (ABC'D')$ nên

$$CB' \perp MN.$$

b) Gọi O là tâm của hình hộp và I là tâm của mặt bên $BCC'B'$ thì $O \in MN$.

Ta có
$$\begin{cases} MN \perp CI \\ MN \perp CH \end{cases} \Rightarrow MN \perp (CIH) \Rightarrow IH \perp MN$$
 Trong

$(ABC'D')$ đường thẳng MN đi qua điểm O cố định và điểm H nhìn đoạn OI dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn đường kính OI .
Gọi $H_1 = AC' \cap (\zeta), H_2 = BD' \cap (\zeta)$ với (ζ) là đường tròn đường kính OI trong $(ABC'D')$.



Từ đó ta lập luận được tập hợp các điểm H là cung tròn H_1H_2 .

82.

a) Đặt $OB = b, OC = c$ thì $b + c = 1$

$$\begin{aligned} S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC} &= \frac{1}{2}OA \cdot OB + \frac{1}{2}OB \cdot OC + \frac{1}{2}OC \cdot AO \\ &= \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}bc \end{aligned}$$

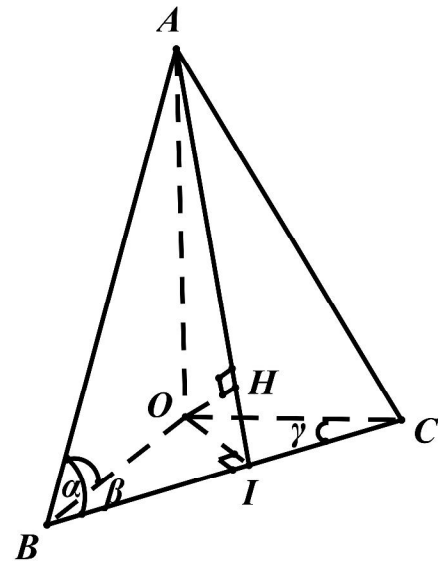
Gọi I là hình chiếu của O trên BC và H là hình chiếu của O trên (ABC) .

Ta có
$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2} \Rightarrow OI^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}.$$

Do đó $AI^2 = OI^2 + OA^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} + 1 = \frac{b^2 + c^2 + b^2c^2}{b^2 + c^2} = \frac{(b+c)^2 - 2bc + b^2c^2}{b^2 + c^2}$

$$= \frac{(1-bc)^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow AI = \frac{1-bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad (\text{do } 0 < bc < 1)$$



$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AI \cdot BC = \frac{1}{2} \frac{1-bc}{\sqrt{b^2+c^2}} \sqrt{b^2+c^2} = \frac{1}{2}(1-bc).$$

Vậy $S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC} + S_{ABC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}(1-bc) = 1$ không đổi.

b) Đặt $\alpha = \angle OBA, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle OCB$.

Áp dụng định lí Côsin cho tam giác ABC ta có $\cos\beta = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC}$

$$= \frac{OB^2 + OC^2 + OA^2 + OB^2 - (OA^2 + OC^2)}{2BA \cdot BC} = \frac{OB^2}{BA \cdot BC}$$

$$= \frac{OB(OA - OC)}{BA \cdot BC} = \frac{OA \cdot OB}{BA \cdot BC} - \frac{OB \cdot OC}{BA \cdot BC} = \cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma = \cos(\alpha + \gamma)$$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Vậy $\angle OBA + \angle ABC + \angle OCB = 180^\circ$.

83. Tam giác ABC vuông tại A và

$AB = AC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung

điểm của BC thì $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp AA' \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (AIA') \Rightarrow AI \perp B'C$ (1).

Để thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên

$BC' \perp B'C$ (2). Từ (1), (2) suy ra (α)

chính là mặt phẳng đi qua M song song với AI và BC' .

Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ AI \parallel (\alpha) \\ AI \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN \parallel AI, N \in BC$.

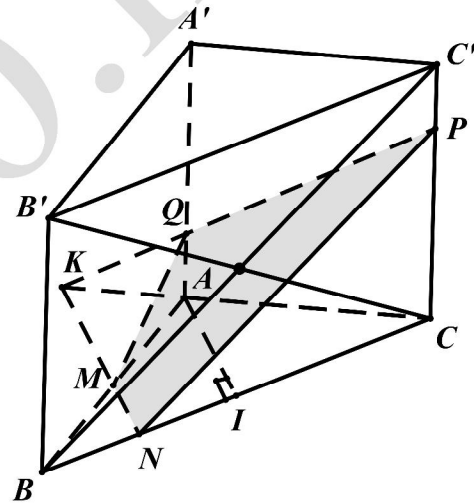
Tương tự $(\alpha) \cap (BCC'B') = NP \parallel B'C, P \in CC'$.

Gọi $K = AC \cap MN, Q = PK \cap AA'$. Thiết diện là tứ giác MNPQ.

$$S_{td} = S_{KNP} - S_{KMQ} = S_{KMQ} \left(\frac{S_{KNP}}{S_{KMQ}} - 1 \right) = S_{KMQ} \left(\frac{KN}{KM} \cdot \frac{KP}{KQ} - 1 \right).$$

Do M là trung điểm của AB và $KN \parallel AI$ nên $\frac{KN}{KM} = \frac{KN}{AI} = \frac{CN}{CI} = \frac{3}{2}$.

Tương tự $QA \parallel CC' \Rightarrow \frac{KP}{KQ} = \frac{KC}{KA} = \frac{NC}{NI} = 3$.



$$AQ = \frac{1}{3}NC = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \quad AK = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}. \text{ Tứ diện } AMKQ \text{ vuông tại } A$$

$$\text{nên } S_{KMQ} = \frac{1}{2} \sqrt{(OM \cdot OK)^2 + (OK \cdot OQ)^2 + (OQ \cdot OM)^2} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{8}$$

$$\text{Từ đó ta có } S_{td} = \frac{7a^2 \sqrt{2}}{16}.$$

Chú ý: Có thể dùng phép chiếu vuông góc lên mp (ABC) để tính diện tích thiết diện MNPQ.

84. Gọi $K = MN \cap BD$.

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SB \subset (SAB) \\ SB \parallel (\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel SB, Q \in SA$$

$$\text{Tương tự } (\alpha) \cap (SBC) = NP \parallel SB, P \in SC$$

$(\alpha) \cap (SBD) = KI \parallel SB, I \in SD$. Thiết diện là ngũ giác MNPIQ.

Để thấy MKIQ và NKIP là hai hình thang vuông có diện tích bằng nhau, do đó

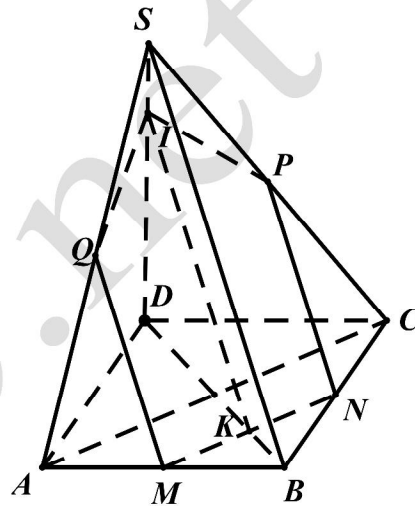
$$S_{td} = (MQ + IK)MK. \text{ Ta có } MQ = \frac{1}{2}SB = \frac{b}{2},$$

$$\text{trong } \triangle SBD \text{ có } \frac{IK}{SB} = \frac{DK}{BD} = \frac{\frac{3}{4}BD}{BD} = \frac{3}{4} \Rightarrow IK = \frac{3}{4}SB = \frac{3b}{4},$$

$$MK = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Từ đó ta có } S_{td} = \frac{5ab\sqrt{2}}{16}.$$

85. a) Do $C'D' \parallel AB$ nên $(MN, C'D') = (MN, AB) = \angle BMB = 45^\circ$



b) Ta có $AD' \parallel BC'$ nên

$$(BD, AD') = (BD, BC') = DBC'$$

Để thấy tam giác BDC' đều nên

$$DBC' = 60^\circ.$$

c) Ta có $MN \parallel AC$ nên

$$(MN, AP) = (AC, AP) = CAP$$

Để thấy

$$AC = a\sqrt{2}, CP = \frac{a\sqrt{5}}{2}, AP = \frac{3a}{2}$$

$$\cos CAP = \frac{AC^2 + AP^2 - CP^2}{2AC \cdot AP}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } & \frac{2a^2 + \frac{9a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{3a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \Rightarrow CAP = 45^\circ. \text{ Vậy } (MN, Ap) = 45^\circ. \end{aligned}$$

86. Gọi F là trung điểm của BD

thì $EF \parallel \frac{1}{2}CD$, do đó

$$(CD, SE) = (EF, SE) = SEF$$

Ta có

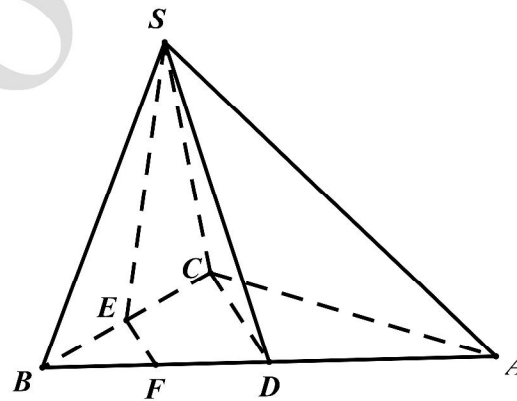
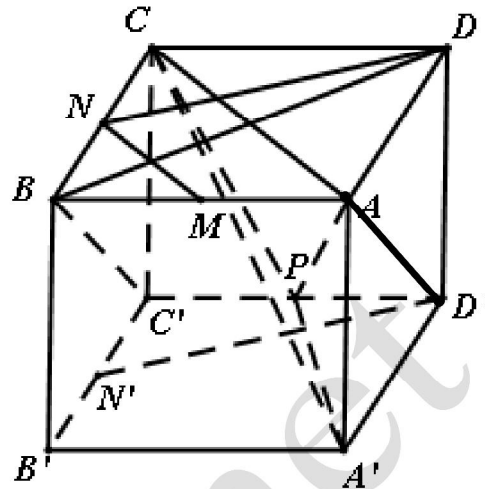
$$EF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \left(\frac{AB\sqrt{3}a}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}a}{2}$$

Trong tam giác SCE ta có

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2$$

Trong tam giác SCF ta có $SE^2 = SC^2 + CF^2 = SC^2 + CD^2 + DF^2 = \frac{15a^2}{2}$

$$\text{Do đó } \cos SEF = \frac{SE^2 + EF^2 - SF^2}{2SE \cdot EF} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SEF = 135^\circ$$



$$\Rightarrow (CD, SE) = 45^\circ.$$

87. a) Đặt $x = AM, y = BN$ và $AB = a$. Áp dụng định lý cô sin ta có

$$\begin{aligned} \cos \angle MON &= \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} \\ &= \frac{x^2 + \frac{a^2}{2} + y^2 + \frac{b^2}{2} - (x+y)^2}{2OM \cdot ON} = \frac{a^2 - 4xy}{2OM \cdot ON} \end{aligned}$$

Do $AM \perp AB$ và $BN \perp AM$ nên $AM \perp AN$, do đó

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = AM^2 + BN^2 + AB^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = x^2 + y^2 + a^2 \Rightarrow 2xy = a^2$$

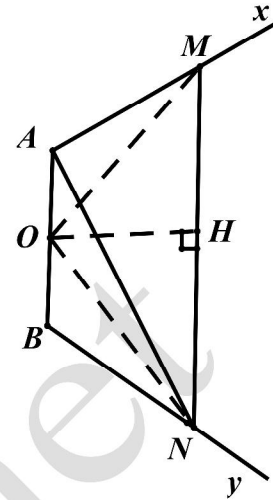
$$\Rightarrow \cos \angle MON = \frac{-a^2}{2OM \cdot ON} < 0. \text{ Vậy tam giác } MON \text{ tù.}$$

b) Kẻ $OH \perp MN, H \in MN$. Ta chứng minh $OH = \frac{AB}{2}$. Thật vậy, giả sử

$OH > OA$. Khi đó xét các tam giác MOA, MOH ta có $MH < AM$ và xét các tam giác NOB và NOH ta có $NH < BN$, suy ra $MN < AM + BN$ (mâu thuẫn giả thiết).

Tương tự $OH < OA$ cũng mâu thuẫn giả thiết.

Vậy $OH = OA$, hay $OH = \frac{AB}{2}$ không đổi.



88.

a) Tam giác ABD cân tại B có I là trung điểm của AD nên $BI \perp AD$. Tương tự

$$CI \perp AD \Rightarrow AD \perp (IBC)$$

$\Rightarrow AD \perp IJ$. Do vai trò bình đẳng giữa AD và BC nên $IJ \perp BC$.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của AD và BC.

b) Dựng hình thang BCD'A' sao cho I, J lần lượt là trung điểm của hai đáy A'D', BC và $IA' = IA, ID' = ID$. Ta thấy với điểm M tùy ý trên IJ thì $MA = MA', MD = MD'$ nên

$$MA + MB + MC + MD = MA' + MB + MC + MD' = (MA' + MC) + (MD' + MB) \geq A'C + D'B.$$

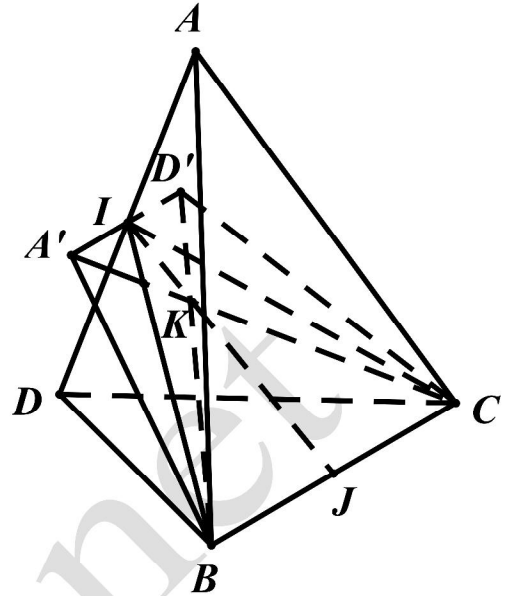
Đẳng thức xảy ra khi $M = A'C \cap D'B$.

$$\text{Ta có } IJ^2 = DJ^2 - ID^2 = DC^2 - JC^2 - ID^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{\sqrt{2a^2 - b^2 - c^2}}{2}.$$

$$BD'^2 = \left(\frac{BC + A'D'}{2}\right)^2 + IJ^2 = a^2 + \frac{bc}{2} \Rightarrow BD' = \sqrt{a^2 + \frac{bc}{2}}$$

$$\text{Vậy } \min(MA + MB + MC + MD) = 2BD' = \sqrt{4a^2 + 2bc}$$



89.

I là trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi T là giao điểm của A'H với B'C', E, F lần lượt là các giao điểm của AB và BC; CI và AB. Dễ thấy D, T, E thẳng hàng (thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (IAD) và (DBC)). Do H là trực tâm của tam giác A'B'C' nên $A'T \perp B'C'$, mặt khác theo giả thiết $DA \perp DB$ và $DA \perp DC$ nên $DA \perp (DBC) \Rightarrow DA \perp B'C'$; do đó $B'C' \perp (DA'T) \Rightarrow B'C' \perp DT$.

$$\text{Ta có } C'DT + B'DT = 90^\circ \text{ và } DB'T + B'DT = 90^\circ \Rightarrow C'DT = DB'T \quad (1)$$

Mặt khác tứ giác BCC'D' là tứ giác nội tiếp nên $DB'T = C'CB \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra tam giác EDC cân tại E $\Rightarrow ED = EC$, mà tam giác DBC vuông tại D suy ra $ED = EC = EB$, thế thì AE là trung tuyến của tam giác ABC.

Tương tự ta cũng chứng minh được CF là trung tuyến của tam giác ABC, vì vậy I là trọng tâm của tam giác ABC.

Chứng minh $MN + MP + MQ = 3DI$

Rõ ràng ID cắt các mặt (DAB), (DBC), (DAC) tại D nên đường thẳng qua M cùng phương với ID chắc chắn cắt các mặt (DAB), (DBC), (DCA).

Gọi X, Y, Z lần lượt là các giao điểm của IM với các cạnh AB, AC, BC (Lưu ý là nếu IM song song với một cạnh nào đó của tam giác ABC thì ta vẫn dễ dàng dựng được các giao điểm của đường thẳng Δ với các mặt các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA))

Ta có N, P, Q theo thứ tự là các giao điểm của DX, DZ, DY với Δ .

Kẻ $MR \parallel IB$, thì $\frac{MN}{ID} = \frac{XM}{XI} = \frac{MR}{IB} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta IBC}} = \frac{3S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$ (do I là trọng tâm của

tam giác ABC nên $S_{\Delta IBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$).

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{MP}{ID} = \frac{3S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}, \frac{MQ}{ID} = \frac{3S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}}.$$

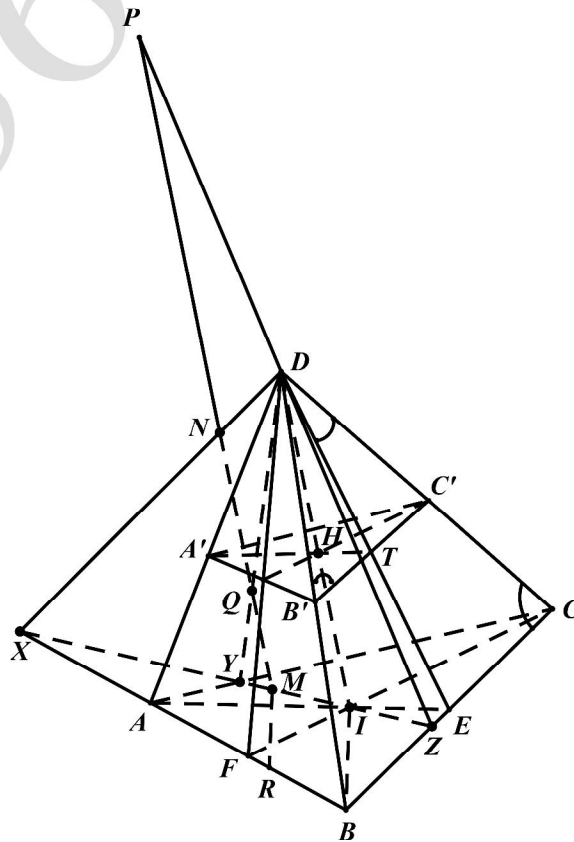
Do đó

$$\begin{aligned} & \frac{MN}{ID} + \frac{MP}{ID} + \frac{MQ}{ID} \\ &= \frac{3S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{3S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{3S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}} = 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow MN + MP + MQ = 3DI$$

Theo BĐT Cauchy ta có

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2} \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ} \right)^2 \end{aligned}$$



$$\geq \frac{1}{3} \cdot \frac{81}{(MN+MP+MQ)^2} = \frac{27}{(3DI)^2} = \frac{3}{DI^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I$ (khi đó $N, P, Q \equiv D$)

Vậy $\min T = \frac{3}{DI^2}$ khi M trùng với trọng tâm của tam giác.