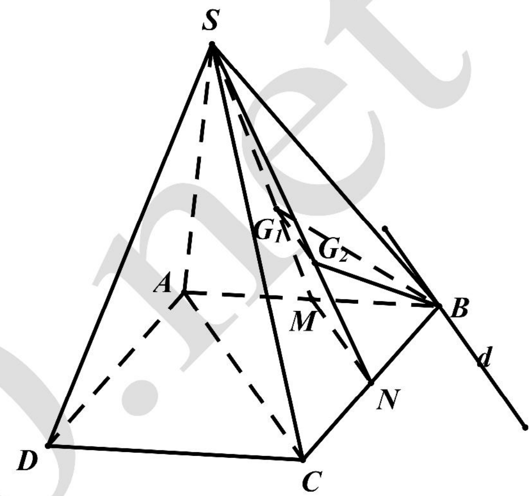
Đáp án chuyên đề:
Đường thẳng và mặt phẳng song song - Hình học 11

31.

a) Ta có $\begin{cases} MN \,//\, AC \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, (SAC)$.



b) G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SBC nên $\frac{SG_1}{SM} = \frac{SG_2}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, MN$ mà $MN \,//\, AC \Rightarrow G_1G_2 \,//\, AC$.

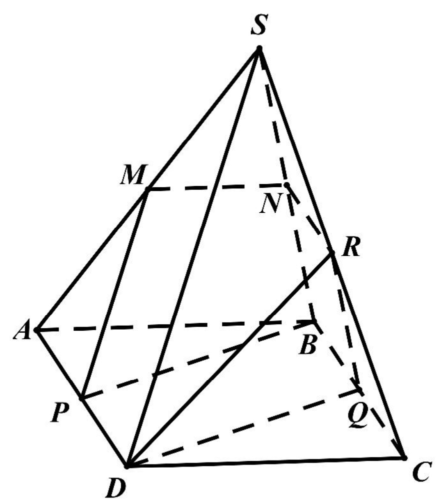
Vậy $\begin{cases} G_1G_2 \,//\, AC \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (SAC)$.

c) Ta có $\begin{cases} B \in (ABC) \cap (BG_1G_2) \\ NM \subset (ABC) \\ G_1G_2 \subset (BG1G_2) \\ MN \,//\, G_1G_2 \end{cases}$

$\Rightarrow (ABC) \cap (BG_1G_2) = d \,//\, MN \,//\, G_1G_2, B \in d$.

32. a) Ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow MN \,//\, AB$

Vậy $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, (ABCD)$.



b) Tương tự $\frac{SM}{SA} = \frac{PD}{AD} \Rightarrow SD \,//\, MP$

mà $MP \subset (MNP) \Rightarrow SD / (MNP)$.

c) Kẻ $NR \,//\, BC, R \in SC$, kẻ $RQ \,//\, SB, Q \in BC$ thì ta có $\frac{SN}{SB} = \frac{SR}{SC}$ (1) và $\frac{SR}{SC} = \frac{BQ}{BC}$ (2),

mặt khác $\frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$ (3).

Từ $(1),(2),(3)$ ta có

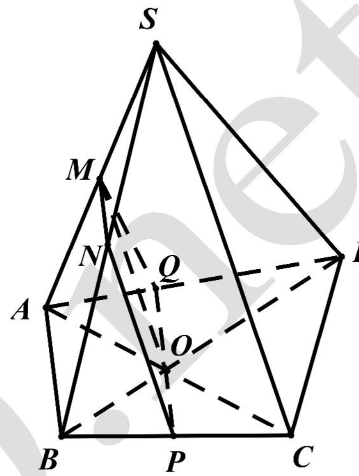
$\frac{BQ}{BC} = \frac{PD}{AD} \Rightarrow BQ = PD$.

Lại có $NR = BQ \Rightarrow NR = PD$

Thêm nữa $\begin{cases} NR \,//\, BQ \\ PD \,//\, BQ \end{cases} \Rightarrow NR \,//\, PD$ nên $PDRN$ là hình bình hành, từ đó ta có

$\begin{cases} NP \,//\, DR \\ DR \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow DR \,//\, (SCD)$.

33. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với AB và SC



Ta có $\begin{cases} O \in (P) \cap (SAC) \\ SC \subset (SAC) \\ SC \,//\, (P) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (P) = OM \,//\, SC, O \in SA$.

Tương tự

$\begin{cases} N \in (SAB) \cap (P) \\ AB \subset (SAB) \\ AB \,//\, (P) \end{cases}$

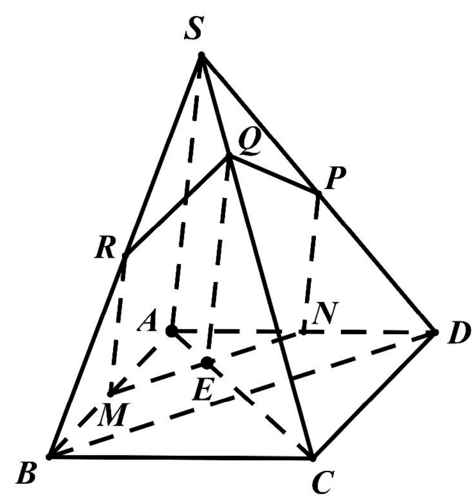
$\Rightarrow (SAB) \cap (P) = MN \,//\, AB, N \in SB$.

$\begin{cases} N \in (P) \cap (SBC) \\ SC \subset (SBC) \\ SC \,//\, (P) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (P) = NP \,//\, SC,$

$P \in BC$.

Trong $(ABCD)$ gọi $Q = PO \cap AD$ thì thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

34. Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \,//\, BD \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$



$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN \,//\, BD, N \in AD$

Tương tự $(\alpha) \cap (SAD) = NP \,//\, SA, P \in SD$

$(\alpha) \cap (SAB) = MR \,//\, SA, R \in SB$

Gọi $E = MN \cap AC$ thì $(\alpha) \cap (SAC) = EQ \,//\, SA, Q \in SC$

Thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.

35. Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SBC) \\ SC \subset (SBC) \\ SC \,//\, (\alpha) \end{cases}$

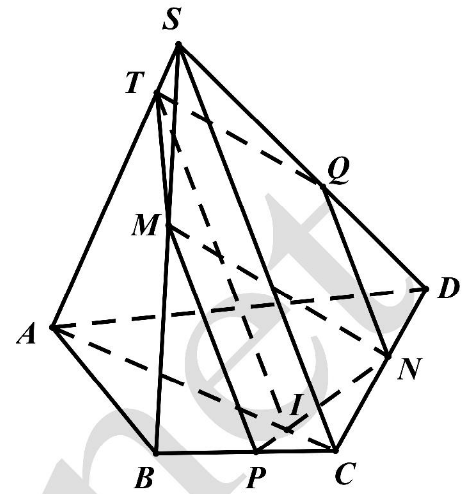
$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = MP \,//\, SC, P \in BC$.

Tương tự $(\alpha) \cap (SCD) = NQ \,//\, SC, Q \in SD$

Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap PN$ thì

$(\alpha) \cap (SAC) = IT \,//\, SC, T \in SA$

Thiết diện là ngũ giác $MPNQT$.



36.

a) Gọi $I = AO \cap BC, J = AO' \cap BD$ ta có

$(AOO') \cap (BCD) = IJ$ do đó

$OO' \,//\, (BCD) \Leftrightarrow OO' \,//\, IJ$

$\Leftrightarrow \dfrac{OA}{OI} = \dfrac{O'A}{O'J}$ (1).

Mặt khác ta có $\dfrac{OA}{OI} = \dfrac{AB}{BI}$ (2)

$\dfrac{O'A}{O'J} = \dfrac{AB}{BJ}$ (3). Từ $(1),(2),(3)$ suy ra

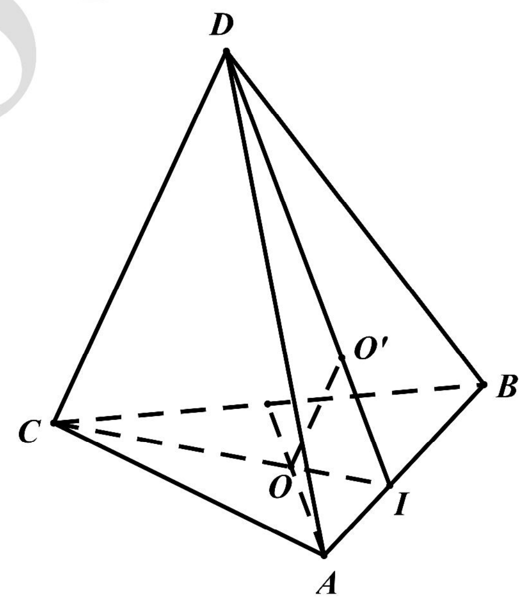
$BI = BJ$.

Lại có $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{IB}{BC} = \dfrac{AB}{AB+AC}$

và $\dfrac{JB}{JD} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow \dfrac{JB}{BD} = \dfrac{AB}{AB+AD}$

nên $IB = JB \Leftrightarrow \dfrac{AB.BC}{AB+AC} = \dfrac{AB.BD}{AB+AD}$

$\Leftrightarrow \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AB+AC}{AB+AD}$ (1).



b) Trường hợp $OO' \,//\, (BCD)$ và $OO' \,//\, (ACD)$ thì ta có

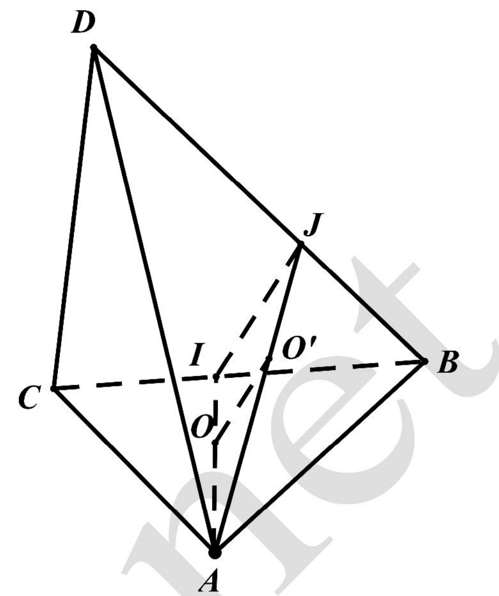
$\begin{cases} (BCD) \cap (ACD) = CD \\ OO' \,//\, (BCD) \\ OO' \,//\, (ACD) \end{cases} \Rightarrow OO' \,//\, CD$.

Vì vậy OO' và CD đồng phẳng.

Xét ba mặt phẳng $(ABC),(ABD),(CDOO')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là AB,CO,DO' nên ba giao tuyến này đồng quy.Gọi I là điểm đồng quy này thì I là chân các đường phân giác của các góc C,D trong các tam giác CAB,DAB tương ứng.Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{IA}{IB}=\frac{DA}{DB}$ và $\frac{IA}{IB}=\frac{CA}{CB}$

suy ra $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}\quad(2)$

Kết hợp với đẳng thức (1) ta có



$\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}=\frac{AC}{AD}=\frac{AB+AC-AC}{AB+AD-AD}=\frac{AB}{AB}=1$ (Tính chất dãy tỉ số bàng nhau).

Vậy $BC=BD,AC=AD$.

37. a) Gọi $O=AC\cap BD,I=SO\cap AM$.

Ta có $\begin{cases}BD\,//\,(\alpha)\\ BD\subset(SBD)\\ I\in(\alpha)\cap(SBD)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SBD)=EF\,//\,BD,E\in SB,F\in SD,I\in EF$

Thiết diện là tứ giác $AEMF$.

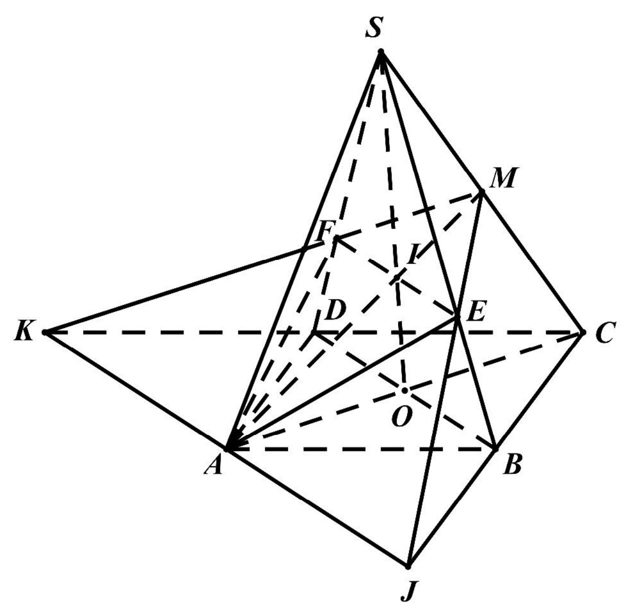
b) Do O,M lần lượt là trung điểm của AC,SC nên I là trọng tâm của tam giác $SAC\Rightarrow\frac{IS}{IO}=\frac{2}{3}$, mặt khác $EF\,//\,BD$ nên $\frac{SE}{SB}=\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$.

Từ đó ta có

$\frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SE}{SB}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Và $\frac{S_{\Delta SMF}}{S_{\Delta SCD}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SF}{SD}=\frac{1}{3}$.

c) Dễ thấy K,A,J là điểm chung của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (α) nên



chúng thẳng hàng . Gọi $d = (\alpha) \cap (ABCD)$ thì $\begin{cases} BD // (\alpha) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow d // BD$, mà

$BD // EF \Rightarrow d // EF$.

Vậy K, A, J thuộc đường thẳng d song song với EF .

38.

a)

Ta có $\begin{cases} M \in (ABM) \cap (SCD) \\ AB // (SCD) \\ AB \cap (ABM) \end{cases} \Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = IJ // AB // CD,$

$M \in IJ, I \in SD, J \in SC$.

Gọi $E = SN \cap AB, F = SM \cap CD \Rightarrow EF = (SMN) \cap (ABCD)$.

b) Do M, N là trọng tâm của các tam giác SCD và SAB nên

$\frac{SM}{SF} = \frac{2}{3}, \frac{SN}{SE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SF} = \frac{SN}{SE} \Rightarrow MN // EF,\ EF \subset (ABCD) \Rightarrow MN // (ABCD)$.

c) Ta có $IJ // CD \Rightarrow \frac{SI}{SD} = \frac{SM}{SF} = \frac{SN}{SE}$

$\Rightarrow IN // DE,\ DE \subset (ABC)$

$\Rightarrow MN // (ABCD)$.

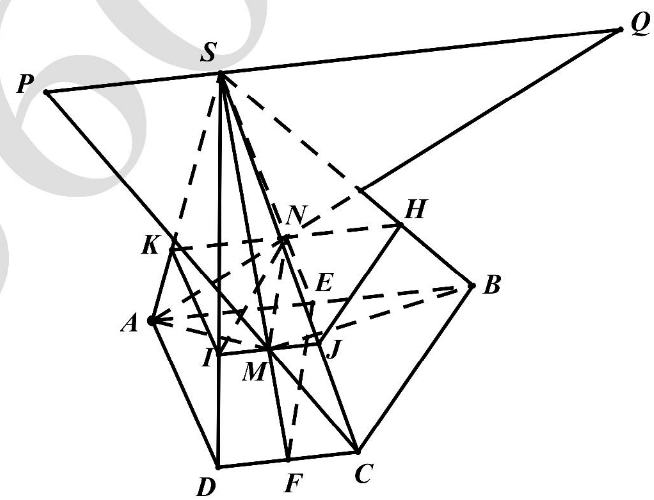
d) Gọi $\Delta = (SAB) \cap (SCD)$

$P = CM \cap \Delta \Rightarrow \begin{cases} P \in \Delta \subset (SAB) \\ P \in CM \end{cases}$

$\Rightarrow P = CM \cap (SAB)$.

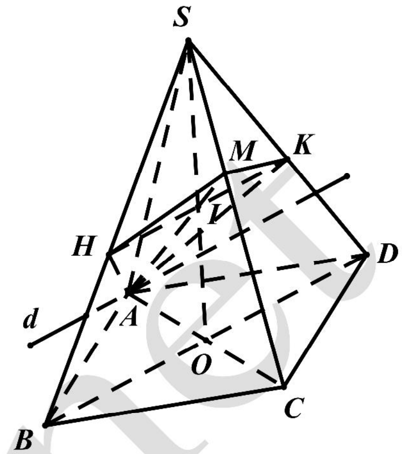
Tương tự gọi $Q = AN \cap \Delta$ thì $Q = AN \cap (SCD)$.

Ta có S, P, Q thuộc Δ nên chúng thẳng hàng.



39. a) Trong $(ABCD)$ gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với BD thì d cố định

Ta có $\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in d \\ d \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow d \subset (\alpha)$. Vậy (α) luôn chứa đường thẳng d cố định.



b) Gọi $I = AM \cap HK$, thế thì $\frac{SB}{SH} = \frac{SD}{SK} = \frac{SO}{SI}$ nên

$\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} = \frac{2SO}{SI}$ (1).

Gọi N là trung điểm của MC, ta có

$$\frac{SC}{SM} = \frac{SN+NC}{SM} = \frac{SN}{SM} + \frac{NC}{SM} = \frac{SN}{SM} + \frac{SN-SM}{SM} = 2\frac{SN}{SM} - 1 = 2\frac{SO}{SI} - 1 \quad (2).$$

Từ $(1),(2)$ ta có $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM} = 2\frac{SO}{SI} - \left(2\frac{SO}{SI} - 1\right) = 1$.

c) Xét các mặt phẳng $(\alpha),(SAB),(SCD)$ ta thấy

$(\alpha) \cap (SAB) = AH, (\alpha) \cap (SCD) = MK,$

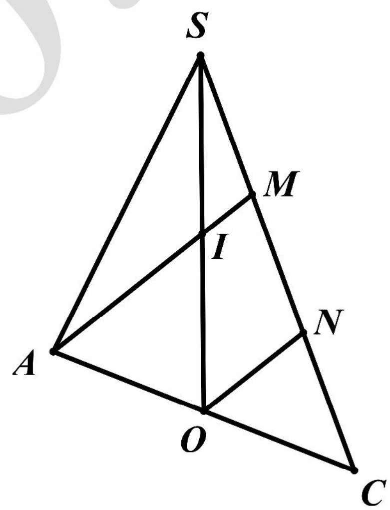
$(SAB) \cap (SCD) = d \,//\, AB \,//\, CD$.

Do đó nếu $AH \,//\, MK \Rightarrow AH \,//\, MK \,//\, d$

$\Rightarrow AH \,//\, AH$ (vô lí).

Tương tự , Nếu $AK \,//\, MH$ cũng dẫn đến vô lí.

Vậy thiết diện không thể là hình thang.



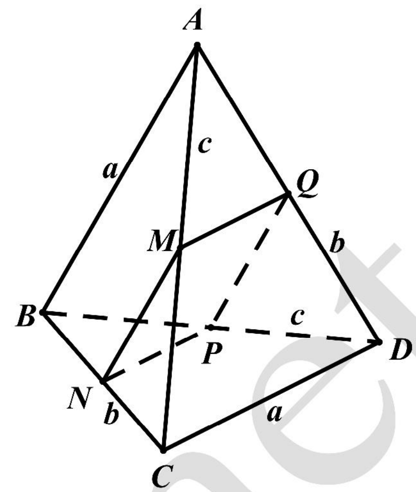
40. Giả sử (α) cắt các cạnh AC, CB, BD, DA theo thứ tự tại M, N, P, Q thì $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có $MN \,//\, AB \,//\, PQ$ và $MQ \,//\, CD \,//\, NP$

Do đó $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CB} \Rightarrow MN = \frac{CN.AB}{CB} = \frac{a}{b}CN$

Tương tự $\frac{NP}{CD}=\frac{BN}{BC}\Rightarrow NP=\frac{CD.BN}{BC}=\frac{a}{b}BN$.

Để MNPQ là hình thoi ta phải có $MN=NP\Rightarrow CN=BN$ hay N là trung điểm của BC. Từ đó ta suy ra được M,P,Q cũng là trung điểm của các cạnh AC,BD,AD.



Ta có $BM^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$.

Tương tự $DM^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$

$\Rightarrow BM=DM\Rightarrow MP\perp DB$, do đó

$$MP^2=BM^2-BP^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}-\frac{c^2}{4}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

Tương tự ta tính được $NQ^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$.

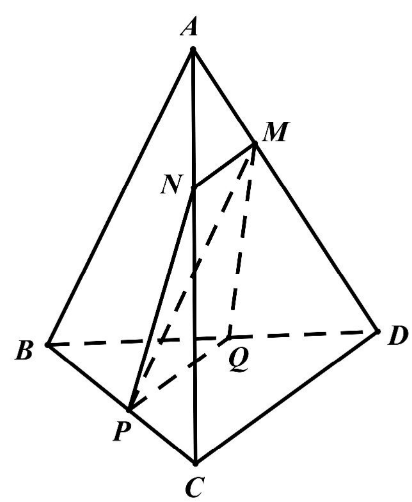
Vậy $S_{MNPQ}=MP.NQ=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$

41. a) Ta có $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(ACD)\\CD\subset(ACD)\\CD\,//\,(\alpha)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(ACD)=MN\,//\,CD,N\in AC$

Tương tự $(\alpha)\cap(BCD)=PQ\,//\,CD,Q\in BD$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

Vì $\begin{cases}MN\,//\,CD\\PQ\,//\,CD\end{cases}\Rightarrow MN\,//\,PQ$ nên MNPQ là hình thang.



Dễ thấy $DQ=CP=x$, $DM=a-x$, Áp dụng định lí cô sin cho tam giác DMQ ta có

$MQ^2=DM^2+DQ^2-2DM.DQ\cos60^0$

$\Rightarrow MQ^2=x^2+\left(a-x\right)^2-2x\left(a-x\right)\frac{1}{2}$

$=3x^2-3ax+a^2\Rightarrow MQ=\sqrt{3x^2-3ax+a^2}$.

Tương tự ta cũng tính được

$NP=\sqrt{3x^2-3ax+a^2}\Rightarrow MP=NQ$.

Vậy MNPQ là hình thăng cân. Dễ thấy $MN=x,PQ=a-x$, đường cao hình thang $h=\frac{1}{2}\sqrt{8x^2-8ax+3a^2}$.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}[a+(a-x)].\frac{1}{2}\sqrt{8x^2-8ax+3a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{8x^2-8ax+3a^2}$.

b) Ta có $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}a\sqrt{8x^2-8ax+3a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{8\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a^2} \geq \frac{a^2}{2}$

Vậy $\min S_{MNPQ} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

42.

a) Ta có $\begin{cases} AB \,//\, CD \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AB \,//\, (SCD)$.

Do đó $\begin{cases} AB \,//\, (SCD) \\ AB \subset (\alpha) \\ (\alpha) \cap (SCD) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, AB$, hay $ABMN$ là hình thang.

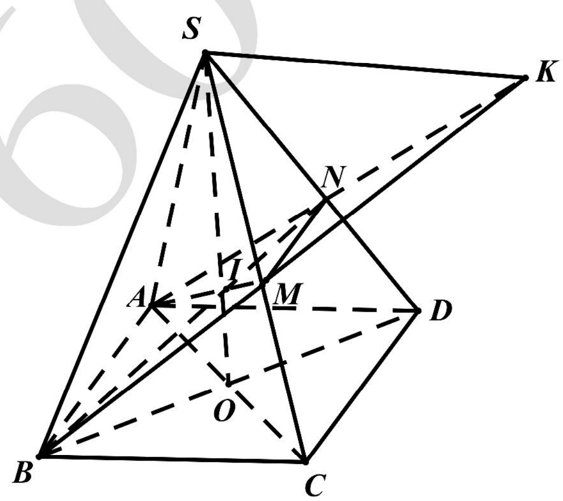
b) Ta có $I = AM \cap BN \Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in BN \subset (SBD) \end{cases}$.

Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$, thế thì

$I \in SO$ cố định.

c) Lập luận tương tự câu b) ta được K thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

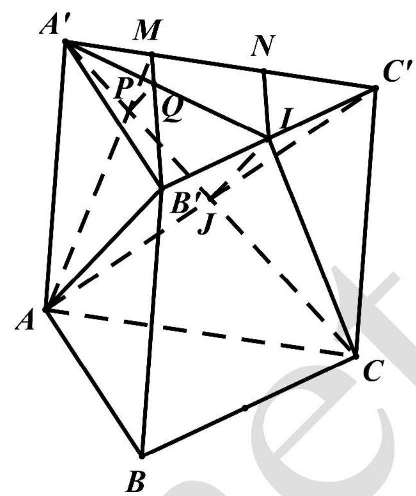


Vì $MN//AB \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BM}{MK}$

Tương tự $SK \,//\, BC \Rightarrow \frac{BC}{SK} = \frac{MB}{MK}$

suy ra $\frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK} = 0$ không đổi.

43. a) Gọi $J = AC' \cap A'C$ thì IJ là đường trung bình của tam giác $C'B'A$ nên $IJ \,//\, AB'$.



Vậy $\begin{cases} IJ \subset (A'IC) \\ AB' /\!/ IJ \end{cases} \Rightarrow AB' /\!/ (A'IC)$.

b) Ta có $\begin{cases} AB' /\!/ (A'IC) \\ AB' \subset (MA'B) \\ (MA'B) \cap (A'IC) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ /\!/ A'B$.

Đặt $\frac{A'M}{A'C'} = x \ (0 < x < 1)$.

Ta có $\frac{S_{A'PQ}}{S_{A'IC}} = \frac{A'P.A'Q}{A'C.A'I}$

Do $A'M /\!/ AC$ nên $\frac{A'P}{A'C} = \frac{A'M}{AC} = x$. Gọi N là trung điểm của AC' thì ta có $\frac{A'Q}{A'I} = \frac{A'M}{A'N} = \frac{A'M}{A'C' - NC'} = \frac{A'M}{A'C' - \frac{1}{2}C'M}$

$$= \frac{A'M}{A'C' - \frac{1}{2}(A'C' - A'M)} = \frac{2A'M}{A'C' + A'M} = \frac{2\frac{A'M}{A'C'}}{1 + \frac{A'M}{A'C'}} = \frac{2x}{1+x}$$

$\Rightarrow \frac{S_{A'PQ}}{S_{A'IC}} = \frac{2x^2}{1+x}$.

Do đó $\frac{S_{A'PQ}}{S_{A'IC}} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{1+x} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 9x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{37}}{18}$.

Vậy để $S_{\Delta A'PQ} = \frac{2}{9} S_{\Delta A'CI}$ thì M nằm trên $A'C'$ sao cho $A'M = \frac{1+\sqrt{37}}{18} A'C'$.

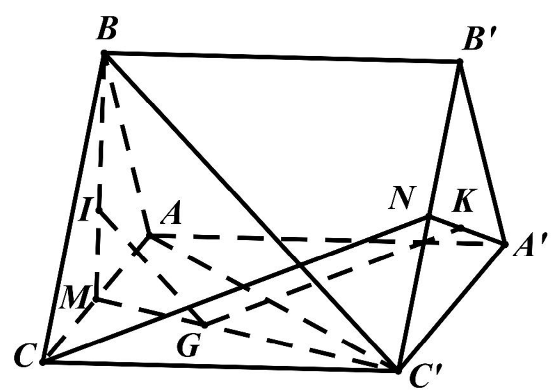
44.

a) Gọi M là trung điểm của cạnh AC thì $\frac{IM}{IB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{MG}{MC'} = \frac{1}{3}$.

Do đó $\frac{IM}{IB} = \frac{MG}{MC'} \Rightarrow IG /\!/ BC'$

Vậy $IG /\!/ BC' \subset (ABC')$

$\Rightarrow IG /\!/ (ABC')$.



b)

Dễ thấy C, G, A' thẳng hàng và

$AC /\!/ A'C' \Rightarrow \frac{A'G}{GC} = \frac{C'G}{GM} = 2$

Gọi N là trung điểm của $B'C'$

Ta có K là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$ nên

$\frac{A'K}{A'N} = 2 \Rightarrow \frac{A'G}{GC} = \frac{A'K}{A'N} \Rightarrow GK /\!/ CN$.

Vậy $GK \,//\, CN \subset (BCC'B') \Rightarrow GK \,//\, (BCC'B')$.

45. a) Ta có $\begin{cases} I \in (IJM) \cap (ABC) \\ AB \subset (ABC) \\ AB \,//\, (IJM) \end{cases}$

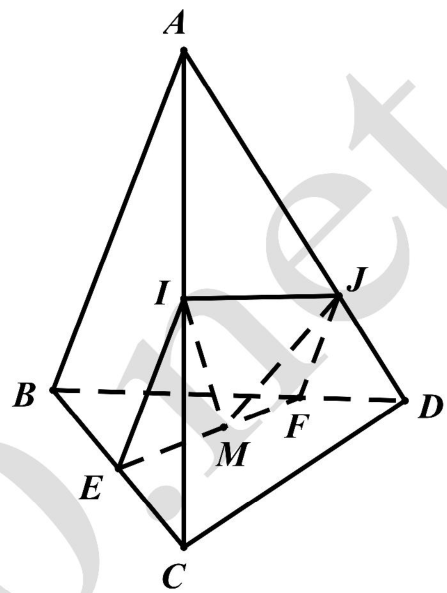
$\Rightarrow (IJM) \cap (ABC) = IE \,//\, AB, E \in BC$.

Tương tự $(IJM) \cap (ABD) = JF \,//\, AB, F \in BD$

Từ đó ta thấy $EF = (MIJ) \cap (BCD)$ mà

$M \in (MIJ) \cap (BCD) \Rightarrow M \in EF$.

Vậy tập hợp điểm M là đoạn EF.



b) Do $\begin{cases} IE \,//\, AB \\ JF \,//\, AB \end{cases}$ nên thiết diện $IEFJ$ là hình thang.

Dễ thấy $JF = \frac{a}{3}, IE = \frac{a}{2}$. Áp dụng định lí Côsin ta có $IJ^2 = AI^2 + AJ^2 - 2AIAJ\cos 60^0$

$= \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - 2.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{1}{2} = \frac{13a^2}{36}$.

Tương tự ta cũng có $IE^2 = \frac{13a^2}{36}$, do đó $IEFJ$ là hình thang cân và không khó khăn gì ta có thể tính được diện tích thiết diện là $S = \frac{a^2 5\sqrt{51}}{144}$.