Đáp án chuyên đề: Hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song - Hình học 11

19. Do M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC nên $MN\,//\,BC$.

Vậy $\begin{cases} D\in(DMN)\cap(SBC)\\ MN\subset(DMN)\\ BC\subset(SBC)\\ MN\,//\,BC\end{cases}$

$\Rightarrow(DMN)\cap(SBC)=d\,//\,MN\,//\,BC, D\in d$.

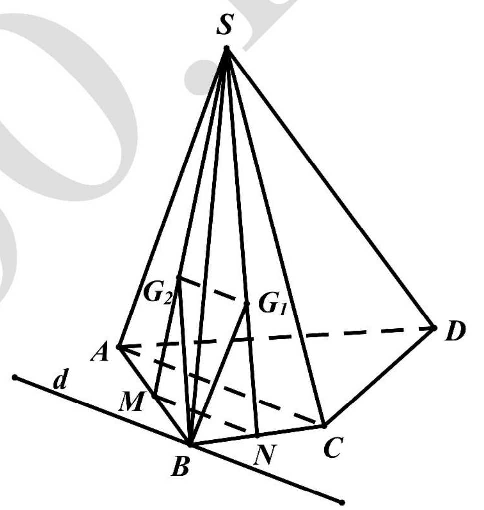
20. a) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,BC.

Do G_1,G_2 là trọng tâm các tam giác SBC và SAB nên $\frac{SG_1}{SN}=\frac{2}{3},\frac{SG_2}{SM}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow\frac{SG_1}{SN}=\frac{SG_2}{SM}$

$\Rightarrow G_1G_2\,//\,MN$. Mặt khác

$MN\,//\,AC\Rightarrow G_1G_2\,//\,AC$.



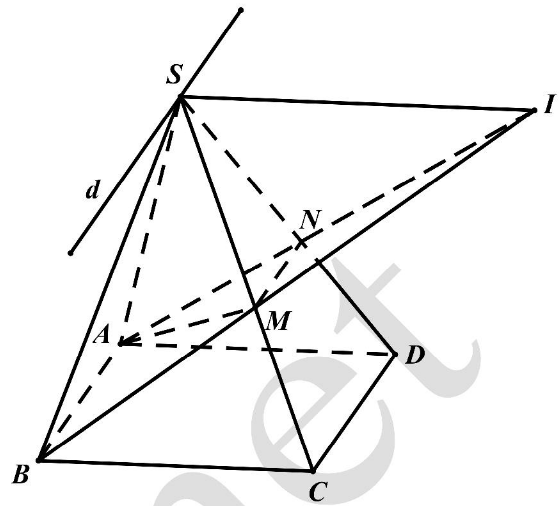
b) Ta có $\begin{cases} B\in(BG_1G_2)\\ G_1G_2\subset(BG_1G_2)\\ AC\subset(ABCD)\\ G_1G_2\,//\,AC\end{cases}$

$\Rightarrow(BG_1G_2)\cap(ABCD)=d\,//\,AC\,//\,G_1G_2$,

21. a) Ta có

$\begin{cases} S\in(SAB)\cap(SCD)\\ AB\,//\,CD\\ AB\subset(SAB)\\ CD\subset(SCD)\end{cases}\Rightarrow(SAB)\cap(SCD)$

$= d \,//\, AB \,//\, CD, S \in d$.



b) Ta có $\begin{cases} M \in (SCD) \cap (ABM) \\ AB \,//\, CD \\ AB \subset (ABM) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = d' \,//\, AB\ M \in d'$.

Trong (SCD) gọi

$N = d' \cap SD \Rightarrow N = SD \cap (ABM)$ Do $MN \,//\, AB$ nên tứ giác $ABMN$ là hình thang.

c) Gọi $\Delta = (SAD) \cap (SBC)$ thì Δ cố định.

Vì

$I = AN \cap BM \Rightarrow \begin{cases} I \in AN \subset (SAD) \\ I \in BM \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow I \in \Delta$.

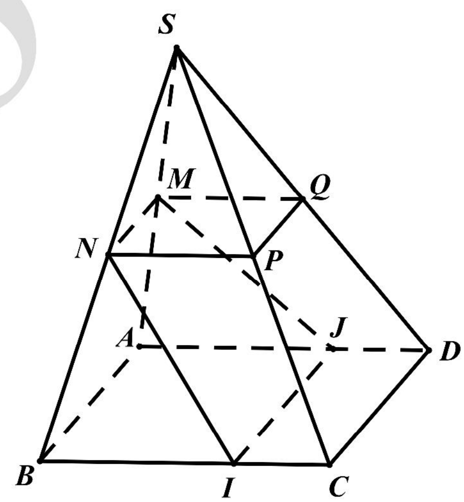
Vậy $I \in \Delta$ cố định.

22.

a) Ta có $MN \,//\!= \frac{1}{2}AB$ và $PQ \,//\!= \frac{1}{2}CD$

mà $AB \,//\!= CD$ nên $MN \,//\!= PQ$.

Vậy $MNPQ$ là hình bình hành.

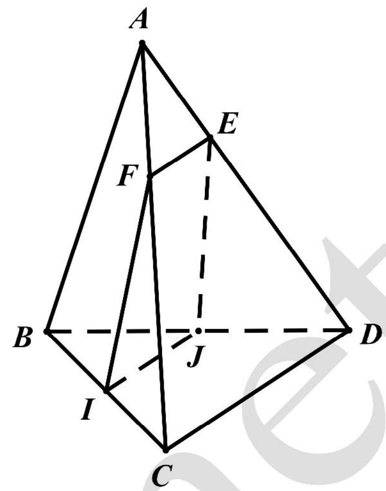


b) Ta có $\begin{cases} I \in (IMN) \cap (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \\ MN \subset (IMN) \\ AB \,//\, MN \end{cases}$

$\Rightarrow (IMN) \cap (ABCD) = IJ \,//\, AB \,//\, MN$ với $J \in AD$. Thiết diện của hình chóp với (IMN) là hình thang $MNIJ$.

23. a) Ta có

$\begin{cases} F \in (IJF) \cap (ACD) \\ IJ \subset (IJF), CD \subset (ACD) \Rightarrow (IJF) \cap (ACD) = FE \,//\, CD \,//\, IJ. \\ IJ \,//\, CD \end{cases}$



Thiết diện là tứ giác $IJEF$.

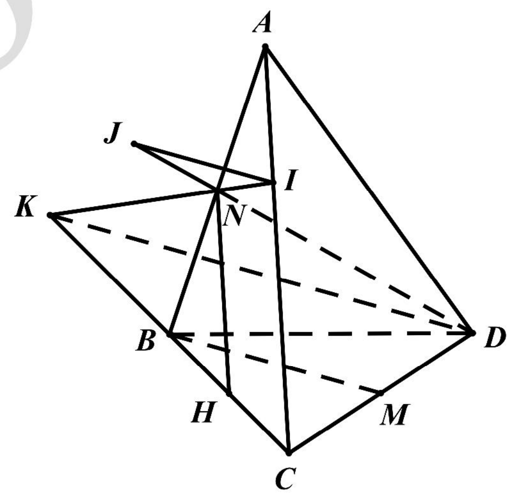
b) Để thiết diện $IJEF$ là hình bình hành thì $IJ // = EF$ mà $IJ // = \frac{1}{2}CD$ nên $EF // = \frac{1}{2}CD$, hay EF là đường trung bình trong tam giác ACD ứng với cạnh CD do đó E là trung điểm của AD.

c) Để thiết diện $IJEF$ là hình thoi thì trước tiên nó phải là hình bình hành, khi đó E là trung điểm của AD. Mặt khác $IJEF$ là hình thoi thì $IJ = IF$, mà $IJ = \frac{1}{2}CD, IF = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = CD$.

Vậy điều kiện để thiết diện là hình thoi là tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$ và E là trung điểm của AD.

24. a) Trong (BCD), từ D kẻ đường thẳng song song với BM cắt BC tại K. Nối K và N cắt AC tại I. Trong (IKD), từ I kẻ đường thẳng song song với DK cắt DN tại J.

Khi đó $IJ // BM$.



b) Do BM là đường trung bình của tam giác CKD nên $KD = 2BM = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó

$HN // AC \Rightarrow \frac{NK}{NI} = \frac{KH}{HC} = \frac{3HC}{HC} = 3$

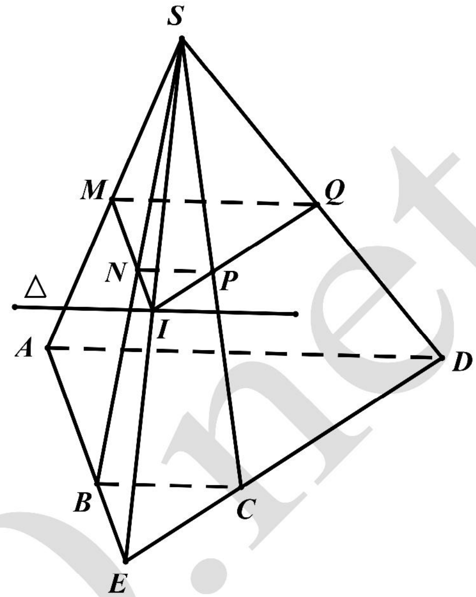
$\Rightarrow NK = 3NI \Rightarrow KD = 3IJ$

$\Rightarrow IJ = \frac{1}{3}KD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

25. a) Ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$

$I = MN \cap PQ \Rightarrow \begin{cases} I \in MN \subset (SAB) \\ I \in PQ \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$, hay $I \in SE$.



b) Do $\begin{cases} I \in (IAD) \cap (IBC) \\ AD // BC \\ AD \subset (IAD) \\ BC \subset (IBC) \end{cases}$

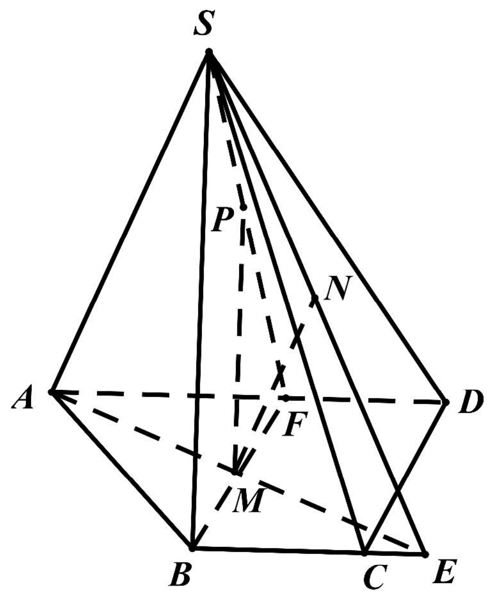
$\Rightarrow (IAD) \cap (IBC) = \Delta // AB // DC, I \in \Delta$ Mặt khác theo giả thiết $\Delta \subset (\alpha)$ nên

$\begin{cases} \Delta \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ \Delta // BC \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \end{cases} \Rightarrow NP // BC // \Delta$

Tương tự ta cũng có $MQ // AD // \Delta$.

Vậy $MQ // NP // BC // AD // \Delta$.

26. a) Gọi $E = AM \cap BC, F = BM \cap AD$. Từ M kẻ các đường thẳng song song với SA, SB lần lượt cắt SE, SF tại N, P. Thì N, P là các điểm cần dựng.



b) Ta có $\frac{MN}{SA} = \frac{EM}{EA}$, $\frac{MP}{SB} = \frac{FM}{FB} = \frac{AM}{AE}$ nên

$\frac{MN}{SA} + \frac{MP}{SB} = \frac{EM}{EA} + \frac{AM}{EA} = 1$.

Theo BĐT CauChy ta có

$MN.MP = SA.SB.\frac{MN}{SA}.\frac{MP}{SB}$

$\le \frac{SA.SB}{4}\left(\frac{MN}{SA} + \frac{MP}{SB}\right)^2 = \frac{SA.SB}{4}$

Vậy $\max(MN.MP) = \frac{SA.SB}{4}$ khi $\frac{MN}{SA} = \frac{MP}{SB} = \frac{1}{2}$ hay M là trung điểm của AE và BF, do đó tập hợp điểm M là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

27.

a) Ta có $\begin{cases} P \in (ADP) \cap (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ AD \subset (ADP) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (ADP) \cap (SBC) = PQ \,//\, AD \,//\, BC, Q \in SC$

b) Gọi $I = AP \cap SM, J = DQ \cap SN$ thì $IJ = (ADP) \cap (SMN)$.

Dễ thấy I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SCD. Gọi $K = IJ \cap PD$,ta có $IJ = IK + KJ$.

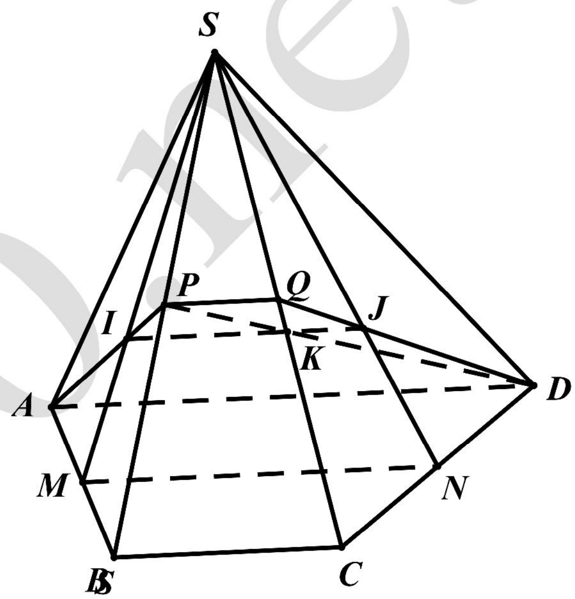
Ta có $\dfrac{IK}{AD} = \dfrac{PI}{PA} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow IK = \dfrac{1}{3}AD = \dfrac{1}{3}a$.

Tương tự $\dfrac{JK}{PQ} = \dfrac{DI}{DQ} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow JK = \dfrac{2}{3}PQ = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{3}b$.

Vậy $IJ = IK + KJ = \dfrac{1}{3}(a + b)$.



28. (HS tự giải)

29.

a) Gọi $E = AM \cap BC$, trong (SAE) vẽ đường thẳng đi qua M và song song với SA cắt SE tại A' thì A' là điểm cần dựng.

Các điểm B', C' được dựng tương tự.

b) Ta có $MA' \,//\, SA$ nên

$\dfrac{MA'}{SA} = \dfrac{EM}{AE} = \dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} \quad (1)$

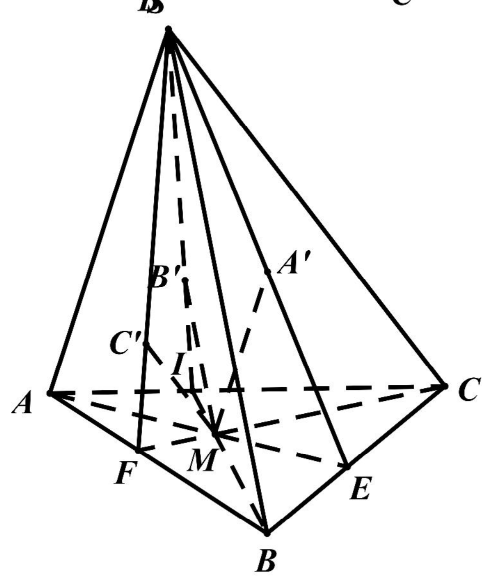
Tương tự

$\dfrac{MB'}{SB} = \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{ABC}} \quad (2)$

$\dfrac{MC'}{SC} = \dfrac{FM}{FC} = \dfrac{S_{MAB}}{S_{ABC}} \quad (3)$

Cộng các đẳng thức $(1),(2),(3)$ ta được

$\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC} = 1$



b) Ta có

$MA'.MB'.MC' = SA.SB.SC.\dfrac{MA'}{SA}.\dfrac{MB'}{SB}.\dfrac{MC'}{SC}$

$$\le SA.SB.SC\left(\frac{\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}}{3}\right)^3=\frac{SA.SB.SC}{27}$$

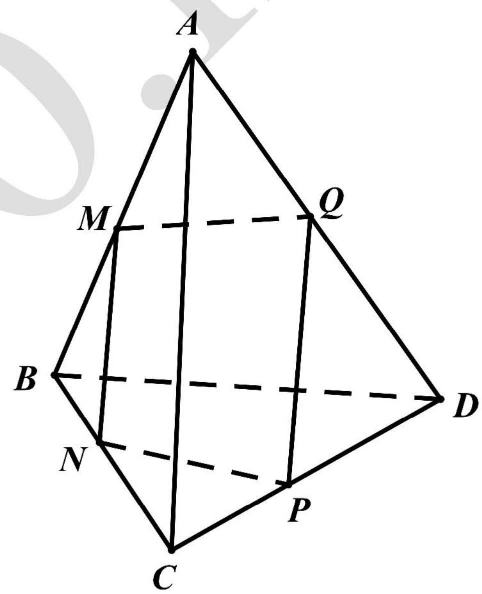
Đẳng thức xảy ra khi $\frac{MA'}{SA}=\frac{MB'}{SB}=\frac{MC'}{SC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{EM}{EA}=\frac{IM}{IB}=\frac{FM}{FC}\Rightarrow M$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Vậy $\max\left(MA'.MB'.MC'\right)=\frac{SA.SB.SC}{27}$.

30. Trước tiên do M,N,E,F đồng phẳng nên theo định lí Menelauyt trong không gian ta có $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$.

Do đó $(MA.NB.PC.QD)^2=(MA.NB.PC.QD)(MB.NC.PD.QA)\ (1)$

Theo BĐT Cau Chy ta có



$$MA.MB\le\left(\frac{MA+MB}{2}\right)^2=\frac{AB^2}{4}$$

$$NB.NB\le\left(\frac{NB+NC}{2}\right)^2=\frac{BC^2}{4}$$

$$PC.PD\le\left(\frac{PC+PD}{2}\right)^2=\frac{CD^2}{4}$$

$$QD.QA\le\left(\frac{QD+QA}{2}\right)^2=\frac{AD^2}{4}$$

Nhân theo vế các BĐT trên và kết hợp với (1) thu được:

$$MA.NB.PC.QD\le\frac{AB.BC.CD.AD}{16}.$$

Đẳng thức xảy ra khi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA nên $MNPQ$ là hình bình hành.