Đáp án chuyên đề:

Khoảng cách và góc - Hình học 10

Bài 3.47. a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ b) 2 c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

Bài 3.48. a) Vì $\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}\neq\frac{1}{-3}$ b)

$M\;\;1;1\;\;\in d_1 \Rightarrow S=d^2\;\;M;d_2\;\;=\frac{1}{52}$

c) $M\;\;x;y\;\;\in\Delta\Rightarrow\frac{\left|2x-3y+1\right|}{\sqrt{13}}=\frac{\left|-4x+6y-3\right|}{\sqrt{52}}$

$\Rightarrow\Delta:2x-3y+1=0$

Bài 3.49. ĐS: $3x+4y-2=0$ và $3x-4y-10=0$.

Bài 3.50. Đường thẳng qua I có dạng

$\Delta:a\;\;x+2\;\;+b\;\;y-3\;\;=0\Leftrightarrow ax+by+2a-3b=0$

Ta có $d\;\;A;\Delta\;\;=d\;\;B;\Delta\;\;\Leftrightarrow\frac{\left|7a-4b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|5a+4b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4b\\a=0\end{array}\right.$

Suy ra $\Delta:4x+y+5=0$ hoặc $\Delta:y=3$

Bài 3.51. a) $C\;\;2t-8;t\;\;,\;AB:x+3y-8=0$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}d\;\;C;AB\;\;.AB\Leftrightarrow17=\frac{1}{2}.\frac{\left|5t-16\right|}{\sqrt{10}}.\sqrt{10}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=10\\t=-\frac{18}{5}\end{array}\right.$

Suy ra $C\;\;12;10$ hoặc $C\left(-\frac{76}{5};-\frac{18}{5}\right)$

b) Tương tự.

Bài 3.52. a) $M\in Ox\Rightarrow M\;\;a;0$.

$d\;\;M;d_1\;\;=d\;\;M;d_2\;\;\Leftrightarrow\frac{\left|2a+5\right|}{\sqrt{13}}=\frac{\left|3a-2\right|}{\sqrt{13}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=7\\a=-\frac{3}{5}\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là $M_1\;\;7;0$ và $M_2\left(-\frac{3}{5};0\right)$

b) $M \in d_1 \Rightarrow M\left(1-2t;1+t\right)$.

$$d\left(M;d_2\right)=d\left(M;d_3\right) \Leftrightarrow \frac{\left|13-4t\right|}{10}=\frac{\left|3-11t\right|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{7}{18} \\ t=\dfrac{19}{26} \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là $M_1\left(\frac{16}{9};\frac{11}{18}\right)$ và $M_2\left(-\frac{6}{13};\frac{45}{26}\right)$

Bài 3.53. Gọi $M\left(x;y\right)$

$$MA=MB \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2=\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2 \Leftrightarrow y=5x+4$$

(1) $d\left(M;d\right)=2 \Leftrightarrow \frac{\left|4x+3y+5\right|}{5}=2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$M_1\left(-\frac{7}{19};\frac{41}{19}\right)$, $M_2\left(-\frac{27}{19};-\frac{59}{19}\right)$

Bài 3.54. Gọi $B\left(x;y\right)$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO} \Rightarrow C\left(x-3,y-1\right)$

Mặt khác ta có

$$\begin{cases} AB=AO \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2=10 \\ -3.\left(x-3\right)-1\left(y-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$ hoặc

$\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ (loại)

Do đó $B\left(2;4\right)$, $C\left(-1;3\right) \Rightarrow AC: x+2y-5=0,\ BO: 2x-y=0$

Bài 3.55. ĐS: $C_1(7;3)$, $C_2\left(-\frac{43}{11};-\frac{27}{11}\right)$

Bài 3.56. $G\left(2t+1;t\right) \Rightarrow C\left(6t;3t+5\right)$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}.d\left(C;AB\right).AB \Leftrightarrow 8=\left|9t+6\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2}{9} \\ t=-\dfrac{14}{9} \end{array}\right.$$

Suy ra có hai điểm thỏa mãn $C_1\left(\frac{4}{3};\frac{17}{3}\right)$, $C_2\left(-\frac{28}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Bài 3.57. Ta có

$AB: 3x - y + 1 = 0,\ AC: x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow B\ \ -2;-5\ \ ,\ C\ \ 4;-1$

Suy ra $BC: 2x - 3y - 11 = 0 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{14}{\sqrt{13}}.\sqrt{50} = \dfrac{35\sqrt{26}}{13}$

Bài 3.58. $S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow AB.d\ \ M;AB\ \ = CD.d\ \ M;CD$ từ đó ta tìm được tập hợp các điểm M là hai đường thẳng có phương trình

$3x + 7y - 21 = 0$ và $5x - y + 13 = 0$

Bài 3.59. Ta có: $AB: 2x + y - 2 = 0$.

$I \in d: y = x \Rightarrow I\ \ t;t\ \ ,\ C\ \ 2t-1;2t\ \ ,\ D\ \ 2t;2t-2\ \ .$

$S_{ABCD} = AB.CH = 4 \Rightarrow CH = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow d\ \ C;AB\ \ = CH \Leftrightarrow \dfrac{|\,6t-4\,|}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Từ đó tọa độ của C và D là $C\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right), D\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ hoặc $C\ \ -1;0\ \ , D\ \ 0;-2$

Bài 3.60. Giả sử vectơ pháp tuyến của đường thẳng MN là $\vec{u}\ \ a;b\ \ $. Khi đó $MN: a\ \ x-2\ \ + b\ \ y-3\ \ = 0,\ NP: b\ \ x-5\ \ - a\ \ y-2\ \ = 0$. Ta có

$$d(C;MN) = d(D;NP); S(MNPQ) = (d(C;MN))^2 = \frac{(6a+3b)^2}{a^2+b^2} \le \frac{(6^2+3^2)(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 40.$$

Dấu bằng khi $a = 2b$. Chọn $a = 1,\ b = 1$ và gọi $D\ \ t;t+5\ \ $ thay vào

$d\ \ C;MN\ \ = d\ \ D;NP\ \ $ ta được $t = 4;\ t = -26$

Vậy $D\ \ 4;9\ \ $ hoặc $D\ \ -26;-21$

Bài 3.61. Kẻ $BH \perp \Delta$ tại H, $CH \perp \Delta$ tại K. Gọi M là trung điểm của BC suy ra $M\ \ 4;2\ \ $,

$AM = \sqrt{5},\ BC = 6$.

+ TH1: Nếu Δ không cắt BC khi đó gọi I là hình chiếu M lên Δ thì

$BH + CK = 2MI \le AM = \sqrt{5}$

+ TH2: Nếu Δ cắt BC khi đó $BH + CK \le BC = 6$

Từ hai trường hợp trên suy ra $BH + CK \le 6$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta \perp BC$

Ta có $\overrightarrow{BC}\ 0;6\ \Rightarrow \Delta : 0\ \ x-2\ \ +6\ \ y-3\ \ =0$ hay $y=3$

Bài 3.62. Do $C\in Oy\Rightarrow C\ \ 0;c\ \ ;\ B\in\Delta\Rightarrow B\ \ 3b;4-4b$

Tam giác ABC vuông tại C

$\Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow 9b-c\ \ 4-4b-c\ \ =0\ \Rightarrow b-1=-\dfrac{c^2+9}{9+4c}\qquad 1$

Lại có :

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}d\ \ C,\Delta\ \ .AB=\dfrac{\left|3c-12\right|}{10}\sqrt{25\ \ b-1\ \ ^2}=\dfrac{3}{2}\left|c-4\right|\left|b-1\right|$, do đó : $S_{ABC}=6\Rightarrow \left|\ c-4\ \ \ b-1\ \right|=4\qquad 2$

Thay (1) vào (2) ta có :

$c^2+9\ \left|\dfrac{c-4}{9+4c}\right|=4\Rightarrow \left[\begin{array}{l} c^3-4c^2-7c-72=0\\ c^3-4c^2+25c=0\end{array}\right.\Rightarrow c=0\ \ \ Do\ c<1$

.

Vậy $C\equiv O\ \ 0;0\ \ ,\ B\ \ 0;4\ \ \ \ hay\ G\left(1;\dfrac{4}{3}\right)$.

Bài 3.63. a) $\cos\ \ d_1;d_2\ \ =\dfrac{9}{\sqrt{130}}$, b) $\cos\ \ d_1;d_2\ \ =\dfrac{\left|1-m\right|}{\sqrt{2+2m^2}}$

Bài 3.64. a) Đường thẳng d đi qua M có dạng

$d: ax+by+2a+b=0,\ a^2+b^2\neq 0$

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 30^0 nên:

$\cos 30^0=\dfrac{\left|3a+2b\right|}{\sqrt{3^2+2^2}.\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\left|3a+2b\right|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow b=\dfrac{24\pm 13\sqrt{3}}{23}a\Rightarrow d_1: 23x+\ \ 24+13\sqrt{3}\ \ y+70+13\sqrt{3}=0$ và

$d_2: 23x+\ \ 24-13\sqrt{3}\ \ y+70-13\sqrt{3}=0$

b) Đường thẳng d đi qua M có dạng

$d: ax+by-4a-b=0,\ a^2+b^2\neq 0$

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 60^0 nên:

$\cos 60^0=\dfrac{\left|a\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{\left|a\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{3}a$

Suy ra $d_1 : x + \sqrt{3}y - 4 - \sqrt{3} = 0$ và $d_2 : x - \sqrt{3}y - 4 + \sqrt{3} = 0$

Bài 3.65.Có

$A \notin \Delta : 7x - y + 8 = 0 \Rightarrow B,\, D \in \Delta,\, BD : x + 7y - 31 = 0.$

$I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ làm tâm hình vuông suy ra $C\ \ 3;4\ \ $.

Đường thẳng qua A có dạng $ax + by + 4a - 5b = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$

Ta có $\cos\ \ AB, AD\ \ = \cos 45^0 = \dfrac{\left|a + 7b\right|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2 + b^2}}$

$AB : 4x + 3y + 1 = 0,\ AD : 3x - 4y + 32 = 0,\ CD : 4x + 3y - 24 = 0,$

$BC : 3x - 4y + 7 = 0$ hoặc $AB : 3x - 4y + 32 = 0$

$AD : 4x + 3y + 1 = 0$,

$CD : 3x - 4y + 7 = 0,\ BC : 4x + 3y - 24 = 0$

Bài 3.66. Đường thẳng AC qua M(1;1) có dạng

$a\ \ x - 1\ \ + b\ \ y - 1\ \ = 0$

Theo bài ra, tam giác ABC cân đỉnh A nên ta có $\ \ AB; BC\ \ =\ \ AC; CA$

từ đó ta tìm được phương trình đường thẳng AC là

$AC : 17x + 7y - 24 = 0$

Bài 3.67. Đáp số : $AB : x - 2 = 0,\ AC : x + \sqrt{3}y - 2 - 6\sqrt{3} = 0$

Bài 3.68. Gọi H là trực tâm tam giác khi đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$

Ta có $A'B' : 4x - 3y - 2 = 0,\ B'C' : y - 2 = 0$

Khi đó ta viết được phương trình đường phân giác trong ngoài $A'B'C'$ là $2x + y - 6 = 0$ cũng chính là phương trình đường thẳng AC

Bài 3.69. Giả sử $M(x;\, y)$. Kẻ $MH \perp AB$. Từ giả thiết suy ra $MH = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

và ΔMAH vuông cân.

Suy ra $AM = MH\sqrt{2} = \sqrt{5}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AM}) = 135^0 \\ AM = \sqrt{5} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(x-1)+1(y-2)}{\sqrt{10}.\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \cos 135^0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2+(y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

Đặt $u = x-1,\ v = y-2$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} 3u+v=-5 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1,\ v=-2 \\ u=-2,\ v=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(0;\ 0) \\ M(-1;\ 3) \end{array}\right.$$

Bài 3.70. I thuộc đường thẳng $x+y-4=0$ nên $I\ \ x_0;4-x_0$

$AD = 2\sqrt{5}$, $IA = \sqrt{2x_0^2-4x_0+4}$, $ID = \sqrt{2x_0^2-8x_0+40}$

$$\frac{IA^2+ID^2-AD^2}{2IA.ID} = \cos\text{AID}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2-3x_0+6}{\sqrt{x_0^2-4x_0+20}.\sqrt{x_0^2-2x_0+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-3x_0+6>0 \\ x_0^4-6x_0^3+12x_0^2-24x_0+32=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \ x_0-2\ \ \ x_0-4\ \ \ x_0^2+4\ \ = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=4 \end{array}\right.$$

- Với $x_0=2 \Rightarrow I\ \ 2;2\ \$ khi đó

  $$IA=2,\ ID=4\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{ID} = -\frac{ID}{IB}.\overrightarrow{IB} = -2\sqrt{2}\overrightarrow{IB}$$

  Từ đây suy ra B $\ 2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\ \ $, C $\ 2+4\sqrt{2},2+4\sqrt{2}$

- Với $x_0=4$: Tương tự ta tìm được B $\ 4+3\sqrt{2};\sqrt{2}\ \ $, C $\ 4+4\sqrt{2};-2\sqrt{2}$