Đáp án chuyên đề:

Khái niệm đạo hàm - Giải tích 11

Vấn đề 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bài 1

1. Ta có: $f'(x_0)=2$

2. $f'(x_0)=-2$

3. $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{7}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{7})}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

4. $f'(\dfrac{\pi}{2})=0$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Bài 2

1. Ta có: $f(x)-f(\dfrac{\pi}{2})=\sin 2x-\sin\pi=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-2$$

Vậy $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

2. Ta có $f(x)-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan x-\tan\dfrac{\pi}{4}=\left(1+\tan x\right).\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{(1+\tan x)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=2$

Vậy $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$.

3. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

Vậy $f'(0)=0$.

Bài 3

1. Ta có: $f(x)-f(1)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3$

Vậy $f'(1)=3$.

2. Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x+3\right)=5$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3x-4)=0$

Dẫn tới $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0=1$.

3. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}.\sin x\right)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+x^2\right)=0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$ và

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+x^2}{x}=1$

Vậy $f'(0)=1$.

4. Ta có hàm số liên tục tại $x_0=-1$ và

$\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{x^2+x+|x+1|}{x(x+1)}$

Nên $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)}=0$

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x(x+1)}=2$

Do đó $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}\neq\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0=-1$.

Nhận xét: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x=x_0$ thì phải liên tục tại điểm đó.

Bài 4

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x)=2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b$

Hàm có đạo hàm tại $x=1$ thì hàm liên tục tại $x=1$ $\Leftrightarrow a+b=2$ (1)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+2)=3$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax-a}{x-1}=a\ (\text{Do } b=2-a\ )$$

Hàm có đạo hàm tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$.

2. Ta thấy với $x\neq 0$ thì $f(x)$ luôn có đạo hàm. Do đó hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm có đạo hàm tại $x=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1;\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow b=1$.

Khi đó: $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0;\ f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a$

$\Rightarrow f'(0^+)=f'(0^-)\Leftrightarrow a=0$.

Vậy $a=0, b=1$ là những giá trị cần tìm.

3. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0);\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b$

Hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow b=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x+1}=-1,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}a=a$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x=0 \Leftrightarrow a=-1$

Vậy $a=-1, b=1$ là giá trị cần tìm.