

TỨ DIỆN VUÔNG

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Định nghĩa.

Tứ diện OABC có OA,OB,OC đôi một vuông góc được gọi là tứ diện vuông. Sau đây là một số tính chất và công thức liên quan đến tứ diện vuông mà có nhiều hệ thức tương tự như công thức lượng trong tam giác vuông.

Cho tứ diện OABC có OA,OB,OC đôi một vuông góc,

OA = a, OB = b, OC = c, đường cao OH = h.

Ta có:

- H là trực tâm tam giác ABC
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
- $S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$ (định lý Pitago)
- $S_{\Delta OAB}^2 = S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta HAB}$ (Công thức hình chiếu)
- Gọi α, β, γ là góc giữa OH với OA, OB, OC thì $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
- Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC thì $a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C$
- Độ dài đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối bằng nhau.
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$
- $V = \frac{1}{6} abc, S_{tp} = \frac{1}{2} (ab + bc + ca + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2})$
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Chứng minh:

- Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$, lại có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$
 $\Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$.

Tương tự $AB \perp CH$, do đó H là trực tâm tam giác ABC.

- Gọi I là giao điểm của AH và BC.

$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad S_{\Delta ABC}^2 &= \frac{1}{4} AI^2 BC^2 = \frac{1}{4} (OA^2 + OI^2) BC^2 \\
 &= \frac{1}{4} OA^2 BC^2 + \frac{1}{4} OI^2 BC^2 \\
 &= \frac{1}{4} OA^2 (OB^2 + OC^2) + \frac{1}{4} OI^2 BC^2 \\
 &= S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad S_{\Delta OAB}^2 &= \frac{1}{4} OA^2 OB^2 = \frac{1}{4} (AH \cdot AI) (BI \cdot BC) \\
 &= \left(\frac{1}{2} AI \cdot BC \right) \left(\frac{1}{2} AH \cdot BI \right) = S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta HAB}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \text{Từ } \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \text{ suy ra} \\
 \left(\frac{OH}{OA} \right)^2 &+ \left(\frac{OH}{OB} \right)^2 + \left(\frac{OH}{OC} \right)^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha &+ \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1
 \end{aligned}$$

• Áp dụng định lý cô tang (định lý cô sin mở rộng) ta có

$$\cot A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - (b^2 + c^2)}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{a^2}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow a^2 \tan A = 2S_{\Delta ABC}.$$

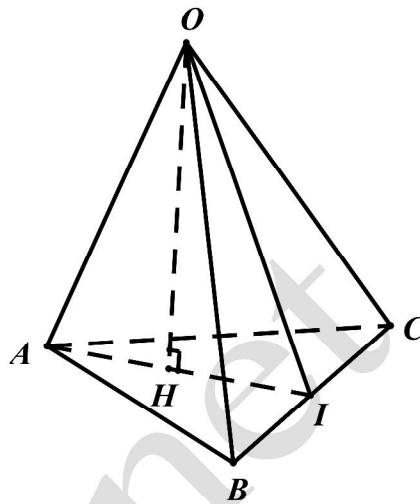
$$\text{Tương tự ta có } b^2 \tan B = c^2 \tan C = 2S_{\Delta ABC}.$$

$$\text{Vậy } a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C.$$

• Sử dụng công thức tính đường trung tuyến và định lý pitago ta có ngay

$$d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}.$$

$$\bullet \quad \text{Theo TC3 ta có } S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 + \frac{1}{4} b^2 c^2 + \frac{1}{4} c^2 a^2$$



$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

- Hiển nhiên
- Từ trung điểm I của BC kẻ đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (OBC) , gọi J là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực của đoạn OA thì J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ và bán kính

$$R = \sqrt{OI^2 + IJ^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

