TỨ DIỆN

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Công thức tính đường trọng tuyến.

Đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện được gọi là đường trọng tuyến của tứ diện.

Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=a, DB=b, DC=c$, $BC=a_1, CA=b_1, AB=c_1$.

Gọi m_d là đường trọng tuyến xuất phát từ đỉnh D.

Ta có $m_d^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{9}$.

Chứng minh:

Gọi D_0 là trọng tâm tam giác ABC và N là trung điểm của BC.

Đặt $DN=p, AN=q$, $DD_0N=\varphi$.

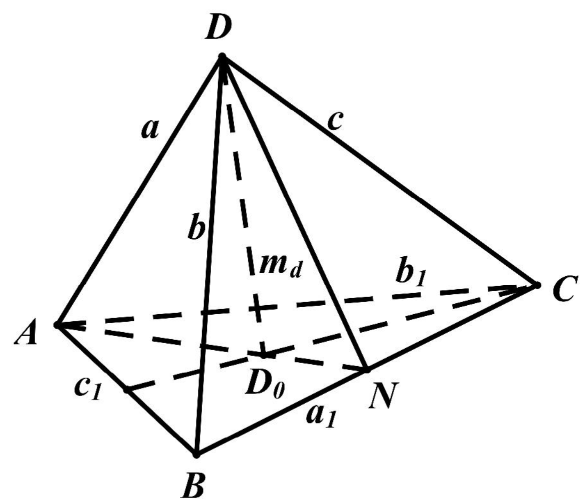
Ta có $DN^2=D_0D^2+D_0N^2-2D_0D.D_0N\cos ND_0D$

$\Rightarrow p^2=m_d^2+\frac{q^2}{9}-2m_d\frac{q}{3}\cos\varphi \ (1)$

Tương tự $AD^2=D_0D^2+D_0A^2-2D_0D.D_0A\cos AD_0D$

$\Rightarrow a^2=m_d^2+\frac{4}{9}q^2+2.\frac{2q}{3}m_d\cos\varphi \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có



$\Rightarrow 2p^2+a^2=2(m_d^2+\frac{q^2}{9}-2m_d\frac{q}{3}\cos\varphi)+m_d^2$

$+\frac{4}{9}q^2+\frac{4q}{3}m_d\cos\varphi \Rightarrow 3m_d^2=a^2+2p^2-\frac{2q^2}{3}$

.

Mặt khác $p^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a_1^2}{4}$

và $q^2=\frac{b_1^2+c_1^2}{2}-\frac{a_1^2}{4}$ nên

$m_d^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{9}$.

(đpcm).

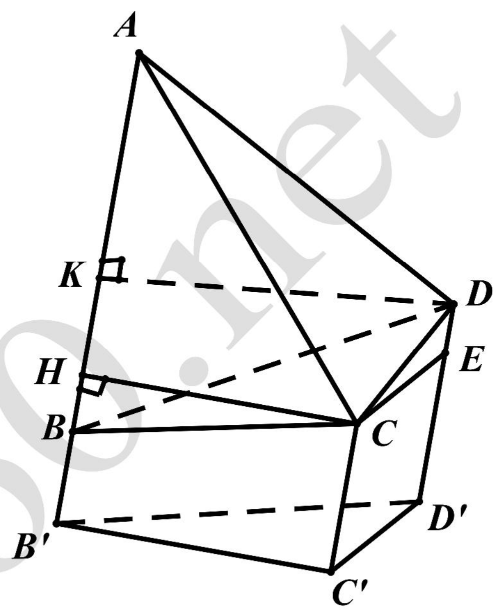
2. Một số công thức về diện tích.

Định lí 1.

Gọi S_1, S_2 là diện tích các mặt ABC và ABD, α là góc nhị diện cạnh AB, φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Giả sử $AB = a, CD = b$.

Ta có $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \dfrac{(ab\sin\varphi)^2}{4}$

Chứng minh:



Xét mặt phẳng (P) vuông góc với cạnh AB tại B'. Gọi H, K là chân đường cao các tam giác CAB và DAB.

Chiếu tứ diện lên (P) theo phương AB ta được $A, B, H, K \mapsto B', C \mapsto C', D \mapsto D'$, nên tứ diện $ABCD$ có hình chiếu là tam giác $B'C'D'$.

Ta có

$B'C' = HC = \dfrac{2S_1}{a}$

$B'D' = DK = \dfrac{2S_2}{a}$

và $C'D' = DE = CD\sin\varphi = b\sin\varphi$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác $B'C'D'$ ta có

$C'D'^2 = B'C'^2 + B'D'^2 - 2B'C'.B'D'\cos C'B'D'$.

$\Leftrightarrow \dfrac{4S_1^2}{a^2} + \dfrac{4S_2^2}{a^2} - 2\dfrac{2S_1}{a}.\dfrac{2S_2}{a}\cos\alpha = (b\sin\varphi)^2$

$\Leftrightarrow S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \dfrac{(ab\sin\varphi)^2}{4}$.

Định lí 2. Trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ta có :

- $S_1 = S_2\cos\varphi_{1,2} + S_3\cos\varphi_{1,3} + S_4\cos\varphi_{1,4} \quad (1)$.
- $S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\varphi_{2,3} - 2S_2S_4\cos\varphi_{3,4} - 2S_3S_4\cos\varphi_{3,4} \quad (2)$.`

Trong đó $\varphi_{i,j}$ là góc nhị diện tao bởi mặt đối diện với đỉnh A_i và các mặt đối diện với đỉnh A_j, S_i là diện tích của mặt đối diện với đỉnh A_i.

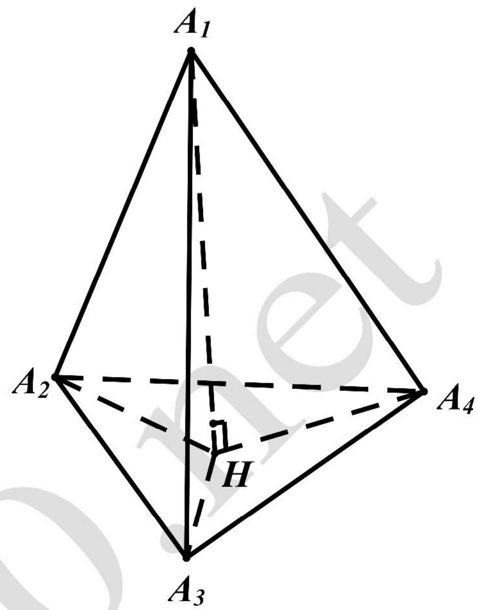
Chứng minh:

- Gọi H là chân đường cao của tứ diện $ABCD$.

Theo công thức hình chiếu với chú ý góc giữa hai mặt phẳng bằng hoặc bù với góc gữa hai nhị diện ta có

$S_{HA_3A_4} = S_2\left|\cos\varphi_{1,2}\right|, S_{HA_2A_4} = S_3\left|\cos\varphi_{1,3}\right|$

$S_{HA_2A_3} = S_4\left|\cos\varphi_{1,4}\right|$.



Nếu $\varphi_{1,2} < 90^0$ thì H và A_2 nằm cùng phía đối với A_3A_4 và khi đó $S_{HA_3A_4} = S_2\cos\varphi_{1,2}$.

Nếu $\varphi_{1,2} = 90^0 \Rightarrow H \in A_3A_4 \Rightarrow S_{HA_3A_4} = 0$.

Nếu $\varphi_{1,2} > 90^0$ thì H và A_2 nằm khác phía đối với A_3A_4 và khi đó $S_{HA_3A_4} = -S_2\cos\varphi_{1,2}$.

Ta cũng có các kết quả tương tự đối với các tam giác HA_2A_3 và HA_2A_4.

Trường hợp 1.

Cả ba góc $\varphi_{1,j} \le 0$ khi đó

$S_1 = S_{HA_2A_3} + S_{HA_3A_4} + S_{HA_2A_4}$

$= S_2\cos\varphi_{1,2} + S_3\cos\varphi_{1,3} + S_4\cos\varphi_{1,4}$.

Trường hợp 2.

Có hai góc không tù, chẳng hạn $\varphi_{1,2} \le 90^0, \varphi_{1,3} \le 90^0, \varphi_{1,4} > 90^0$ khi đó

$S_1 = S_{HA_2A_4} + S_{HA_3A_4} - S_{HA_2A_3} = S_3\varphi_{1,3} + S_2\varphi_{1,2} - \left(-S_4\varphi_{1,4}\right)$

$= S_2\cos\varphi_{1,2} + S_3\cos\varphi_{1,3} + S_4\cos\varphi_{1,4}$.

Trường hợp 3.

Có một góc không tù , chẳng hạn $\varphi_{1,2} \le 90^0$ khi đó

$S_1 = S_{HA_3A_4} - S_{HA_2A_4} - S_{HA_2A_3} = S_2\varphi_{1,2} - (-S_3\varphi_{1,3}) - \left(-S_4\varphi_{1,4}\right)$

$= S_2\cos\varphi_{1,2} + S_3\cos\varphi_{1,3} + S_4\cos\varphi_{1,4}$.

Rõ ràng không thể có trường hợp cả ba góc không nhọn do đó ta có (đpcm)

Lưu ý: Có thể chứng minh công thức (1) cách sử dụng phương pháp vec tơ và định lí con nhím như sau.

Gọi $\overrightarrow{e_i}\left(i = 1,2,3,4\right)$ là các vec tơ đơn vị vuông góc với mặt đối diện của đỉnh A_i thì ta có $S_1\overrightarrow{e_1} + S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} + S_4\overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{0}$

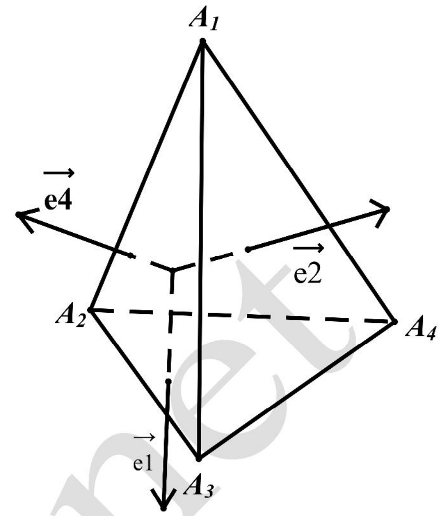
$\Leftrightarrow S_1\overrightarrow{e_1} = -\left(S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} + S_4\overrightarrow{e_4}\right).$

Nhân vô hướng hai vế với $\overrightarrow{e_1}$ và lưu ý

$\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_j}\right) + \varphi_{1,j} = 180^0 \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_j}\right) = -\cos\varphi_{1,j}$

$(j = 2,3,4)$ ta được

$S_1 = S_2\cos\varphi_{1,2} + S_3\cos\varphi_{1,3} + S_4\cos\varphi_{1,4}$.



- Ta chứng minh công thức (2) bằng PP vec tơ,ta có

  $S_1\overrightarrow{e_1} + S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} + S_4\overrightarrow{e_4} = \vec{0}$

  $\Leftrightarrow S_1\overrightarrow{e_1} = -\left(S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} + S_4\overrightarrow{e_4}\right)$

  Bình phương vô hướng kết hợp với

  $\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{e_i};\overrightarrow{e_j}\right) = -\cos\varphi_{i,j}(i \ne j, i, j = 2,3,4)$ ta có điều phải chứng minh.

3. Một số công thức về thể tích của tứ diện.

3. 1. Gọi S_1, S_2 là diện tích các mặt ABC và ABD, α là góc nhị diện cạnh $AB = a$. Thì thể tích tứ diện $ABCD$ là

$$V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$$

Chứng minh:

Gọi H là chân đường cao hạ từ C của tứ diện, kẻ $HK \perp AB$ thì $CHK = \alpha$.

Ta có $V = \frac{1}{3}CH.S_2$, mà

$CH = CK\sin\alpha = \frac{2S_1\sin\alpha}{a}$.

Suy ra $V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.