

CHỦ ĐỀ 5: TỔNG HỢP CÁC DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA

BÀI TOÁN THUẬN TRONG TỔNG HỢP DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA

Nội dung bài toán: Cho biết các phương trình dao động thành phần, yêu cầu tìm dao động tổng hợp.

Phương pháp giải

Tổng hợp hai hay nhiều dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số là một dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số.

Cách 1. Phương pháp áp dụng trực tiếp công thức tính A và $\tan \varphi$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = A \cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{cases}$$

* Nếu một dạng hàm \cos , một dạng hàm \sin thì đổi:

$$\sin(\omega t + \alpha) = \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

* Nếu hai dao động cùng pha $\varphi_2 - \varphi_1 = k2\pi \Rightarrow \boxed{A_{\max} = A_1 + A_2}$

* Nếu hai dao động thành phần ngược pha $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \Rightarrow \boxed{A_{\min} = |A_1 - A_2|}$

* Nếu hai dao động thành phần vuông pha $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$

Cách 2. Phương pháp cộng các hàm lượng giác

$$x = x_1 + x_2 + \dots$$

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \dots$$

$$x = \cos \omega t \underbrace{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)}_{A \cos \varphi} - \sin \omega t \underbrace{(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)}_{A \sin \varphi}$$

$$\Rightarrow x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Cách 3. Phương pháp cộng số phức.

$$x = x_1 + x_2 + \dots$$

$$x = A_1 \angle \varphi_1 + A_2 \angle \varphi_2 + \dots$$

Kinh nghiệm:

1) Khi cần tổng hợp hai dao động điều hòa có thể dùng một trong ba cách trên.

Khi cần tổng hợp ba dao động điều hòa trở lên thì nên dùng cách 2 hoặc cách 3.

2) Phương pháp cộng số phức chỉ áp dụng trong trường hợp các số liệu tường minh hoặc biên độ của chúng có dạng nhân cùng với một số,

$$\text{Ví dụ: } \begin{cases} A_1 = \sqrt{2}a \\ A_2 = \sqrt{3}a \Rightarrow \text{chọn } a = 1 \\ A_3 = \sqrt{5}a \end{cases}$$

3) Trường hợp chưa biết một đại lượng nào đó thì nên dùng phương pháp vector quay hoặc cộng hàm lượng giác. Trường hợp hai dao động thành phần cùng biên độ thì nên dùng phương pháp lượng giác.

Ví dụ 1: Một vật thực hiện hai dao động điều hòa cùng phương cùng tần số: $x_1 = 4 \cos(\omega t + 30)$ cm, $x_2 = 8 \cos(\omega t + 90)$ cm (với ω đo bằng rad/s và t đo bằng giây). Dao động tổng hợp có biên độ là

- A. 6,93 cm. B. 10,58 cm. C. 4,36 cm. D. 11,87 cm.

Hướng dẫn: Chọn đáp án C

Bài toán đơn giản nên ta dùng cách 1: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

$$A = \sqrt{4^2 + 8^2 + 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos(90 - 30)} = 4,36 \text{ (cm)}$$

Ví dụ 2: (ĐH–2008) Cho hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số, cùng biên độ và có các pha ban đầu là $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{\pi}{6}$ (phương trình dạng cos). Pha ban đầu của dao động tổng hợp hai dao động trên bằng

- A. $-\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{12}$

Hướng dẫn: Chọn đáp án D

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \frac{a \sin \frac{\pi}{3} + a \sin \frac{-\pi}{6}}{a \cos \frac{\pi}{3} + a \cos \frac{-\pi}{6}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{12}$$

Ví dụ 3: Một vật thực hiện đồng thời 2 dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số có phương trình: $x_1 = \sqrt{3} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ (cm), $x_2 = \cos(\omega t + \pi)$ (cm). Phương trình dao động tổng hợp là

A. $x = 2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ B. $x = 2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ C. $x = 2 \cos\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$ D. $x = 2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$

Hướng dẫn: Chọn đáp án

$$x = \sqrt{3} \angle \frac{\pi}{2} + 1 \angle \pi = 2 \angle \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) (cm)$$

Dùng máy tính Casio fx 570 – ES, bấm như sau:

Shift **MODE** **4** (Để chọn đơn vị góc là radian)

MODE **2** (Để chọn chế độ tính toán với số phức)

$\sqrt{3}$ **Shift** **(-)** $\frac{p}{2}$ **+** 1 **Shift** **(-)** p

(Màn hình máy tính sẽ hiện thị $\sqrt{3} \angle \frac{\pi}{2} + 1 \angle \pi$)

Shift **2** **3** **=**

Màn hình sẽ hiện kết quả: $2 \angle \frac{2\pi}{3}$.

Nghĩa là biên độ $A = 2cm$ và pha ban đầu $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ nên ta sẽ chọn B.

Chú ý: Để thực hiện phép tính về số phức, bấm: **MODE 2** màn hình xuất hiện **CMPLEX**.

Muốn biểu diễn số phức dạng $A \angle \varphi$, bấm **SHIFT 2 3 =**

Muốn biểu diễn số phức dạng: $a + bi$, bấm **SHIFT 2 4 =**

Để nhập ký tự \angle bấm: **SHIFT (-)**

Khi nhập các số liệu thì phải thống nhất được đơn vị đo góc là độ hay radian

Nếu chọn đơn vị đo là độ (D), bấm: **SHIFT MODE 3** màn hình hiển thị chữ D

Nếu chọn đơn vị đo là Rad (R), bấm: **SHIFT MODE 4** màn hình hiển thị chữ R.

Ví dụ 4: Một vật thực hiện đồng thời 2 dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số có phương

trình: $x_1 = 2 \sin\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) (cm)$, $x_2 = \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) (cm)$. Phương trình dao động tổng hợp

A. $x = \sqrt{5} \cos(\pi t + 1,63)$

B. $x = \cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$

C. $x = \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$

D. $x = \sqrt{5} \cos(\pi t - 1,51)$

Hướng dẫn: Chọn đáp án D

Đổi hàm sin về hàm $\begin{cases} x_1 = 2 \sin\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\pi t - \frac{4\pi}{3}\right) (cm) \\ x_2 = \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

Cách 1:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{-4\pi}{3}\right)} = \sqrt{5} (cm)$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \frac{2 \sin \frac{-4\pi}{3} + 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{2 \cos \frac{-4\pi}{3} + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = -8 - 5\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -1,51 (rad)$$

Cách 2:

$$x = x_1 + x_2 = 2 \sin\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = 2 \sin \pi t \cos \frac{5\pi}{6} - 2 \cos \pi t \sin \frac{5\pi}{6} + \cos \pi t \cos \frac{\pi}{6} - \sin \pi t \sin \frac{\pi}{6}$$

$$x = \cos \pi t \cdot \underbrace{\left(\frac{-2 + \sqrt{3}}{2}\right)}_{\sqrt{5} \cos(-1,51)} - \sin \pi t \cdot \underbrace{\left(\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}\right)}_{\sqrt{5} \sin(-1,51)} = \sqrt{5} \cos(\pi t - 1,51) (cm)$$

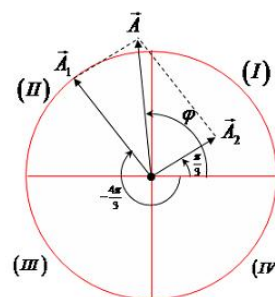
Cách 3:

$$x = x_1 + x_2 = 2 \angle\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + 1 \angle\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{5} \angle 1,63 \Rightarrow x = \sqrt{5} \cos(\pi t + 1,63) (cm)$$

Bình luận : Đáp án đúng là A! Vậy cách 1 và cách 2 sai ở đâu? Ta dễ thấy, véc tơ tổng $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ nằm ở góc phần tư thứ III vì vậy không thể lấy $\varphi = -1,51 rad$!

Sai lầm ở chỗ, phương trình có hai nghiệm :

$$\tan \varphi = -8 - 5\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -1,51 (rad) \\ \varphi = \pi - 1,51 = 1,63 (rad) \end{cases}$$



Ta phải chọn nghiệm 1,63 rad để cho véc tơ tổng “bị kẹp” bởi hai véc tơ thành phần. Qua đó ta thấy máy tính không “đỉnh những bẫy” thông thường giống như con người! Đây chính là một trong những lợi thế của cách 3.

Ví dụ 5: Cho hai dao động điều hoà cùng phương cùng tần số, biên độ lần lượt là a và $a\sqrt{3}$ và pha ban đầu tương ứng là $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$. Pha ban đầu của dao động tổng hợp là: