CHUYÊN ĐỀ I: ỨNG DỤNG VECTƠ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

Phương pháp chung

Để giải một bài toán tổng hợp bằng phương pháp vectơ ta thường thực hiện theo các bước sau
Bước 1: Chuyển giả thiết và kết luận của bài toán sang ngôn ngữ của vectơ, chuyển bài toán tổng hợp về bài toán vectơ.
Bước 2: Sử dụng các kiến thức vectơ để giải quyết bài toán đó.
Bước 3: Chuyển kết quả bài toán vectơ sang kết quả bài toán tổng hợp.

Sau đây là một số dạng toán thường gặp

I. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH VÀ ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG CỐ ĐỊNH.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàng ta chứng minh hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, tức là tồn tại số thực k sao cho: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Để chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định ta đi chứng minh ba điểm A, B, H thẳng hàng với H là một điểm cố định.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi có hai số thực α, β có tổng bằng 1 sao cho: $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

* Nếu A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$
$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$. Đặt $\alpha = 1 - k$; $\beta = k \Rightarrow \alpha + \beta = 1$ và
$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$.

* Nếu $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ với $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha$
$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA}$ Suy ra M, A, B thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho góc xOy . Các điểm A, B thay đổi lần lượt nằm trên Ox, Oy sao cho $OA + 2OB = 3$. Chứng minh rằng trung điểm I của AB thuộc một đường thẳng cố định.

Định hướng: Ta có hệ thức vectơ xác định điểm I là $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ (*)

Từ *ví dụ 1* ta cần xác định hai điểm cố định A', B' sao cho $\overrightarrow{OI} = \alpha\overrightarrow{OA'} + \beta\overrightarrow{OB'}$ với $\alpha + \beta = 1$. Do đó từ hệ thức (*) ta nghĩ tới việc xác định hai điểm cố định A', B' lần lượt trên Ox, Oy

Ta có $* \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{OA}{2OA'}\overrightarrow{OA'} + \frac{OB}{2OB'}\overrightarrow{OB'}$. từ đó ta cần chọn các điểm đó sao cho $\frac{OA}{2OA'} + \frac{OB}{2OB'} = 1$. Kết hợp với giả thiết $OA + 2OB = 3$ ta chọn được điểm A' và B' sao cho $OA' = \frac{3}{2}, OB' = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Trên Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A', B' sao cho $OA'=\frac{3}{2}, OB'=\frac{3}{4}$.

Do I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{OA}{2OA'}\overrightarrow{OA'}+\frac{OB}{2OB'}\overrightarrow{OB'}$

Ta có $\frac{OA}{2OA'}+\frac{OB}{2OB'}=\frac{OA}{2.\frac{3}{2}}+\frac{OB}{2.\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\ \ OA+2OB\ \ =1$

Do đó điểm I thuộc đường thẳng A'B' cố định.

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$, I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm thuộc đoạn AC thỏa mãn $\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Định hướng: Để chứng minh D, E, I thẳng hàng ta đi tìm số k sao cho $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{DI}$, muốn vậy ta sẽ phân tích các vectơ $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DI}$ qua hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ và sử dụng nhận xét " $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow m=n=0$ với $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương " từ đó tìm được $k=\frac{2}{3}$.

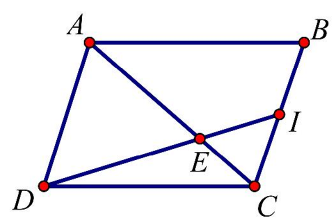
Lời giải (hình 1.35)

Ta có $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (1)

Mặt khác theo giả thiết ta có $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ suy ra

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$=-\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\ \ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\ \ =\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$(2)



Hình 1.35

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$

Vậy ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Ví dụ 4: Hai điểm *M, N* chuyển động trên hai đoạn thẳng cố định *BC* và *BD* ($M\neq B,\ N\neq B$) sao cho $2\frac{BC}{BM}+3\frac{BD}{BN}=10$

Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Dễ thấy luôn tồn tại điểm I thuộc MN sao cho $2\frac{BC}{BM}\overrightarrow{IM}+3\frac{BD}{BN}\overrightarrow{IN}=\vec{0}\quad 1$.

hoc360.net

Gọi H là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{HC}+3\overrightarrow{HD}=\vec{0}\quad 2$ do đó H cố định.

Ta có $\ 2\ \Leftrightarrow 5\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \frac{2BC}{BM}\overrightarrow{BM}+\frac{3BD}{BN}\overrightarrow{BN}=5\overrightarrow{BH}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2BC}{BM}\ \ \overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\ \ +\frac{3BD}{BN}\ \ \overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IN}\ \ =5\overrightarrow{BH}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\frac{BC}{BM}+3\frac{BD}{BN}\right)\overrightarrow{BI}=5\overrightarrow{BH}\text{ (theo (1))}$$

$$\Leftrightarrow 10\overrightarrow{BI}=5\overrightarrow{BH}\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}\ (3)$$

Do các điểm B, H cố định, nên điểm I cố định.(xác định bởi hệ thức (3))

Ví dụ 5: Cho ba dây cung song song AA_1, BB_1, CC_1 của đường tròn (O). Chứng minh rằng trực tâm của ba tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1 nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1

Ta có: $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}$

và $\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}$

Suy ra $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{H_1H_3}=\overrightarrow{OH_3}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{BB_1}$

Vì các dây cung AA_1, BB_1, CC_1 song song với nhau

Nên ba vectơ $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ có cùng phương

Do đó hai vectơ $\overrightarrow{H_1H_2}$ và $\overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương hay ba điểm H_1, H_2, H_3 thẳng hàng.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.101: Cho tam giác ABC và các điểm M là trung điểm AB, N thuộc cạnh AC sao cho $AN=\frac{2}{3}AC$, P là điểm đối xứng với B qua C. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 1.102: Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM=\frac{1}{3}AB,\ AN=\frac{3}{4}AC$. Gọi O là giao điểm của CM và BN. Trên đường thẳng BC lấy E . Đặt $\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{BC}$.

Tìm x để A, O, E thẳng hàng.

hoc360.net

Bài 1.103: Cho ΔABC lấy các điểm I, J thoả mãn $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh rằng IJ đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Bài 1.104: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N di động thỏa mãn
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

a) Chứng minh rằng MN đi qua điểm cố định.

b) P là trung điểm của AN. Chứng minh rằng MP đi qua điểm cố định.

Bài 1.105: Cho hai điểm M,P là hai điểm di động thỏa mãn $\overrightarrow{MP}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$. Chứng minh rằng MP đi qua điểm cố định.

Bài 1.106. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của D qua điểm A, F là điểm đối xứng của tâm O của hình bình hành qua điểm C và K là trung điểm của đoạn OB. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng và K là trung điểm của EF.

Bài 1.107: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$; $A_2.B_2,C_2$ lần lượt là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1. Gọi G,G_1,G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

Chứng minh rằng G,G_1,G_2 thẳng hàng và tính $\dfrac{GG_1}{GG_2}$.

Bài 1.108. Cho tam giác ABC .Các điểm M, N, P lần lượt nằm trên đường thẳng BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC}=\beta\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA}=\gamma\overrightarrow{PB}$.

Tìm điều kiện của α, β, γ để M, N, P thẳng hàng.

Bài 1.109: Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng trung điểm hai đường chéo AC, BD và tâm O thẳng hàng.

Bài 1.110: Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm O thỏa mãn $AB=CD=EF$. Về phía ngoài lục giác dựng các tam giác AMB, BNC, CPD, DQE, ERF, FSA đồng dạng và cân tại M, N, P, Q, R, S. Gọi O_1, O_2 lần lượt là trọng tâm tam giác MPR và NQS.

Chứng minh rằng ba điểm O, O_1, O_2 thẳng hàng.