CHUYÊN ĐỀ II: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Tích vô hướng có rất nhiều ứng dụng trong giải toán. Sau đây chúng ta tiếp cận những ứng dụng của nó trong giải các bài toán hình học.

I. CHỨNG MINH TÍNH VUÔNG GÓC VÀ THIẾT LẬP ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng điều kiện $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

Chú ý: Ta có $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, để chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ thông thường chúng ta phân tích $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ qua hai vectơ không cùng phương.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

Lời giải

Ta có $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$

$= \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 + CD^2 - BC^2 - \left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}\right)^2$

$= -2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right)$

$= 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$

Do đó đường chéo AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi

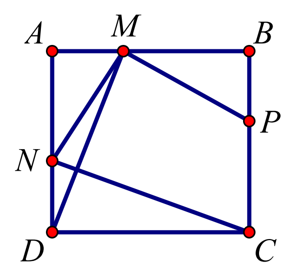
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

Ví dụ 2 Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N thuộc cạnh AB và AD sao cho $AM = DN = x$.

a) Chứng minh rằng CN vuông góc với DM.

b) Giả sử P là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{BP} = y\overrightarrow{BC}$ tìm hệ thức liên hệ của x, y và a để MN vuông góc với MP.

Lời giải (hình 2.11)



Hình 2.11

a) Ta có $\overrightarrow{DN} = -\frac{x}{a}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{x}{a}\overrightarrow{AB}$

Suy ra $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{AB} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AD}$

và $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = \left(\frac{x}{a}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)\left(-\overrightarrow{AB} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AD}\right)$

$= -\frac{x}{a}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{x}{a}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{x^2}{a^2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

Vì $ABCD$ hình vuông nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$

Do đó $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = -ax + ax = 0$

Vậy CN vuông góc với DM.

b) Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{a-x}{a}\overrightarrow{AB}-\frac{x}{a}\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}=\frac{a-x}{a}\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$

Suy ra $MN\perp MP \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}=0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{a-x}{a}\overrightarrow{AB}-\frac{x}{a}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{a-x}{a}\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{(a-x)^2}{a^2}.\overrightarrow{AB}^2-\frac{x}{a}.y.\overrightarrow{AD}^2=0\Leftrightarrow(a-x)^2=axy$

Ví dụ 3: Cho tam giác đều ABC. Lấy các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. Chứng minh rằng $BI\perp IC$.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AM}$. Ta có

$\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)-\overrightarrow{AC}=k\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)-\overrightarrow{AC}$ Hay

$\overrightarrow{CI}=k\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AC}=\frac{2k}{3}\overrightarrow{AB}+\left(\frac{k}{3}-1\right)\overrightarrow{AC}$

Mặt khác $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

Vì $\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CN}$ cùng phương nên $2k=1-\frac{k}{3}\Rightarrow k=\frac{3}{7}$

$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}-\left(\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AC}$

Do đó $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IC}=\left(-\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}\right)\left(-\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{49}\left(10\overrightarrow{AB}^2+6\overrightarrow{AC}^2-32\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

Vì tam giác ABC đều nên $AB=AC$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos A=\frac{1}{2}AB^2$

Suy ra $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IC}=0$

Vậy $BI\perp IC$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ACM, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng GI vuông góc với CM

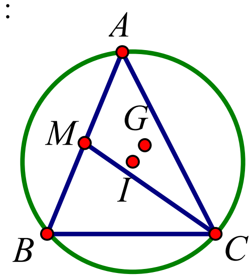
Lời giải (2.12)

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}; \overrightarrow{AC} = \vec{y}$ và : $AB = AC = a$. Ta có :

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}.\vec{x} - \vec{y}$ (1)

Gọi J là trung điểm CM, ta có :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}$$



Hình 2.12

Mặt khác

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB})^2 \\ IA^2 = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI}.\vec{x} = \frac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{AI}.\vec{y} = \frac{a^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{CM}.\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG}\right) = \left(\frac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}\right)\left(\overrightarrow{AI} - \frac{1}{6}.\vec{x} - \frac{1}{3}.\vec{y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{x}.\overrightarrow{AI} - \vec{y}.\overrightarrow{AI} - \frac{1}{12}.x^2 + \frac{1}{6}.\vec{x}.\vec{y} - \frac{1}{6}\vec{x}.\vec{y} + \frac{1}{3}.y^2 =$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3} = 0.$$

Suy ra GI vuông góc với CM

3. Bài tập luyện tập:

Bài 2.96: Cho 4 điểm A, B, C, D thỏa mãn hệ thức $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$. Chứng minh rằng $AB \perp CD$

Bài 2.97 : Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$, N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

Bài 2.98: Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A. Trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy các điểm M, N, E sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CE}{EA}$.

Chứng minh rằng $AN \perp ME$.

Bài 2.99: Cho tam giác đều ABC, độ dài cạnh là 3a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a,\ CN = 2a,\ AP = x$. Tính x để AM vuông góc với PN.

Bài 2.100: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Chứng minh rằng $\widehat{BMN} = 90^0$

Bài 2.101: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$. I là trung điểm của CD. Chứng minh rằng $AI \perp BD$.

Bài 2.102: Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO. Và I, J lần lượt là trung điểm AD và BC. Chứng minh rằng HK vuông góc với IJ.

Bài 2.103: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC. D là hình chiếu của H lên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng AM vuông góc với DB

Bài 2.104: Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A', B' và C'. Gọi P là giao điểm của BC với B'C'. Chứng minh rằng IP vuông góc AA'.

Bài 2.105: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 8$ và $\widehat{A} = 60^0$. Lấy điểm E trên tia AC và đặt $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để BE vuông góc với trung tuyến AF của tam giác ABC.

Bài 2.106: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và G là trọng tâm , I là tâm đường tròn nội tiếp. Tìm điều kiện của a, b, c để IG vuông góc với IC.

Bài 2.107 : Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M, P là trung điểm của đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng : $MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$

Bài 2.108: Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Qua A vẽ các đường thẳng song song với BE, CF lần lượt cắt các đường thẳng CF, BE tại P và Q. Chứng minh rằng PQ vuông góc với trung tyến AM của ABC.