§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

➢ DẠNG TOÁN 1: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Phương pháp giải.

- Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối(GTTĐ) ta tìm cách để khử dấu GTTĐ, bằng cách:

  – Dùng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ.

  – Bình phương hai vế.

  – Đặt ẩn phụ.

- Phương trình dạng $\left|f(x)\right| = \left|g(x)\right|$ ta có thể giải bằng cách biến đổi tương đương như sau

$$\left|f(x)\right| = \left|g(x)\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \text{ hoặc } \left|f(x)\right| = \left|g(x)\right| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\left|2x+1\right| = \left|x^2 - 3x - 4\right|$.

b) $\left|3x-2\right| = 3 - 2x$

c) $\left|x^2 - 4x - 5\right| = 4x - 17$

d) $\left|2x-5\right| + \left|2x^2 - 7x + 5\right| = 0$

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = x^2 - 3x - 4 \\ 2x + 1 = -\left(x^2 - 3x - 4\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 5 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{45}}{2} \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{45}}{2}$ và $\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

b) Cách 1: Với $3 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$ ta có $VT \geq 0,\ VP < 0$ suy ra phương trình vô nghiệm

Với $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$ khi đó hai vế của phương trình không âm suy ra

Phương trình $\Leftrightarrow \left|3x-2\right|^2 = \left(3 - 2x\right)^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 4x^2 - 12x + 9$

$\Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 1$.

Cách 2: Với $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{3}$: Phương trình tương đương với

$3\text{x} - 2 = 3 - 2\text{x} \Leftrightarrow 5\text{x} = 5 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Với $3x-2<0 \Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$: Phương trình tương đương với

$-\left(3\mathrm{x}-2\right)=3-2\mathrm{x} \Leftrightarrow \mathrm{x}=-1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm 1$.

c) Với $4x-17<0 \Leftrightarrow x<\frac{17}{4}$ ta có $VT \geq 0, VP<0$ suy ra phương trình vô nghiệm

Với $4x-17 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{17}{4}$ khi đó hai vế của phương trình không âm suy ra

Phương trình $\Leftrightarrow \left|x^2-4x-5\right|^2=\left(4x-17\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2-4x-5\right)^2=\left(4x-17\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-8x+12\right)\left(x^2-22\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+12=0 \\ x^2-22=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6 \end{array}\right. \\ x=\pm\sqrt{22} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $x \geq \frac{17}{4}$ thấy chỉ có $x=6$ và $x=\sqrt{22}$ thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm là $x=6$ và $x=\sqrt{22}$.

d) Ta có $\left|2x-5\right| \geq 0, \left|2x^2-7x+5\right| \geq 0$ suy ra

$\left|2x-5\right|+\left|2x^2-7x+5\right| \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x-5=0 \\ 2x^2-7x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\frac{5}{2}$.

Nhận xét: Đối với phương trình dạng $\left|f(x)\right|=g(x)$ (*) ta có thể biến đổi tương đương như sau

$$\left|f(x)\right|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x)=g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

Hoặc $\left|f(x)\right| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\left(x+1\right)^2 - 3\left|x+1\right| + 2 = 0$ b) $4x\left(x-1\right) = \left|2x-1\right| + 1$

c) $x^2 + \dfrac{9}{\left(x-1\right)^2} + 1 = 2x + 7\left|\dfrac{x^2-2x-2}{x-1}\right|$

Lời giải

a) Đặt $t = \left|x+1\right|, t \geq 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với $t = 1$ ta có $\left|x+1\right| = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $t = 2$ ta có $\left|x+1\right| = 2 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -3, x = -2, x = 0$ và $x = 1$

b) Phương trình tương đương với $4x^2 - 4x - \left|2x-1\right| - 1 = 0$

Đặt $t = \left|2x-1\right|,\ t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x = t^2 - 1$.

Phương trình trở thành $t^2 - 1 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow t = 2$ nên $\left|2x-1\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{3}{2}$ và $x = -\dfrac{1}{2}$.

c) ĐKXĐ: $x \neq 1$

Phương trình tương đương $\left(x-1\right)^2 + \dfrac{9}{\left(x-1\right)^2} = 7\left|x - 1 - \dfrac{3}{x-1}\right|$

Đặt $t = \left| x - 1 - \dfrac{3}{x-1} \right|$

Suy ra $t^2 = \left(x-1\right)^2 + \dfrac{9}{\left(x-1\right)^2} - 6 \Rightarrow \left(x-1\right)^2 + \dfrac{9}{\left(x-1\right)^2} = t^2 + 6$

Phương trình trở thành $t^2 + 6 = 7t \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 6 \end{array}\right.$

Với $t = 1$ ta có $\left| x - 1 - \dfrac{3}{x-1} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x-1} \right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = \pm 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x - 1 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Với $t = 6$ ta có $\left| x - 1 - \dfrac{3}{x-1} \right| = 6 \Leftrightarrow \left| \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x-1} \right| = 6 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = \pm 6$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 8x + 4 = 0 \\ x^2 + 4x - 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \pm 2\sqrt{3} \\ x = -2 \pm 2\sqrt{3} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$ và $x = -2 \pm 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 3: Giải và biện luận các phương trình sau

a) $\left|mx + 2m\right| = \left|mx + x + 1\right|$ (*)　　　　b) $\left|mx + 2x - 1\right| = \left|x - 1\right|$ (**)

Lời giải

a) Ta có $\left|mx + 2m\right| = \left|mx + x + 1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 2m = mx + x + 1 \\ mx + 2m = -\left(mx + x + 1\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m - 1 \\ \left(2m+1\right)x = -2m - 1 \ (1) \end{array}\right.$

Giải (1)

Với $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ phương trình trở thành $0x = 0$ suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{1}{2}$ phương trình tương đương với $x = -1$

Kết luận

$m = -\frac{1}{2}$ phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x .

$m \neq -\frac{1}{2}$ phương trình (*) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2m - 1$

b) Ta có $|mx + 2x - 1| = |x - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 2x - 1 = x - 1 \\ mx + 2x - 1 = -(x - 1) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m + 1)x = 0 & (2) \\ (m + 3)x = 2 & (3) \end{array}\right.$

Với phương trình (2) ta có

$m = -1$ thì phương trình (2) nghiệm đúng với mọi x

$m \neq -1$ thì phương trình (2) có nghiệm $x = 0$

Với phương trình (3) ta có

$m = -3$ thì phương trình (3) vô nghiệm

$m \neq -3$ thì phương trình (3) có nghiệm $x = \frac{2}{m + 3}$

Kết luận

$m = -1$ phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x

$m = -3$ phương trình (*) có nghiệm $x = 0$

$m \neq -1$ và $m \neq -3$ phương trình (*) có nghiệm $x = 0$ và $x = \frac{2}{m + 3}$.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $\left|x^2 + x\right| = \left|mx^2 - (m + 1)x - 2m - 1\right|$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình tương đương với

$\left|x(x + 1)\right| = \left|(x + 1)(mx - 2m - 1)\right| \Leftrightarrow |x + 1|\left[|x| - |mx - 2m - 1|\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ |x| = |mx - 2m - 1| \ (*) \end{array}\right.$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx - 2m - 1 = x \\ mx - 2m - 1 = -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m - 1)x = 1 + 2m & (1) \\ (m + 1)x = 1 + 2m & (2) \end{array}\right.$

Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm khi đó phương trình ban đầu không thể có ba nghiệm phân biệt.

Nếu $m = -1$ thì phương trình (2) vô nghiệm khi đó phương trình ban đầu không thể có ba nghiệm phân biệt.

Nếu $m \neq \pm 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+2m}{m-1} \\ x = \dfrac{1+2m}{m+1} \end{array}\right.$

Suy ra để phương trình ban đầu có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{1+2m}{m-1} \neq -1 \\ \dfrac{1+2m}{m+1} \neq -1 \\ \dfrac{1+2m}{m-1} \neq \dfrac{1+2m}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\dfrac{2}{3} \\ m \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m \notin \left\{-1; -\dfrac{1}{2}; -\dfrac{2}{3}; 0; 1\right\}$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.24: Giải các phương trình sau

a) $|3x-2| = x^2 + 2x + 3$ b) $|x^3 - 1| = |x^2 - 3x + 2|$

Bài 3.25: Giải các phương trình sau

a) $(2x-1)^2 - 3|2x-1| - 4 = 0$ b) $\dfrac{x^4 - 6x^2 + 4}{x^2} = \left|\dfrac{x^2-2}{x}\right|$

Bài 3.26: Cho phương trình $x^2 - 2x - 2|x-1| + m + 3 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = -2$

b) Tìm m để phương trình sau có nghiệm

Bài 3.27: Giải và biện luận các phương trình sau

a) $|mx + 2m| = |x + 1|$ b) $|mx + 2x| = |mx - 1|$