

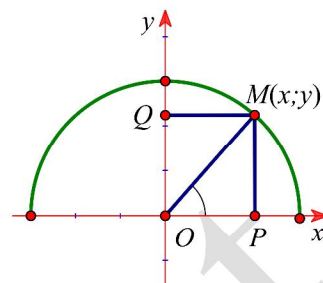
§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Với mỗi góc α $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$, ta xác định điểm M trên đường nửa đường tròn đơn vị tâm O sao cho $\alpha = xOM$. Giả sử điểm M có tọa độ $x; y$.

Khi đó:



Hình 2.1

$\sin \alpha = y$; $\cos \alpha = x$; $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ($\alpha \neq 90^0$); $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ ($\alpha \neq 0^0, \alpha \neq 180^0$) Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là *giá trị lượng giác* của góc α .

Chú ý: Từ định nghĩa ta có:

- Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ox, Oy khi đó $\overline{MP} = \overline{OQ}$.
- Với $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$ ta có $0 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$
- Dấu của giá trị lượng giác:

Góc α	0^0	90^0	180^0
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-

2. Tính chất

• Góc phụ nhau

$$\begin{aligned}\sin(90^0 - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^0 - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(90^0 - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot(90^0 - \alpha) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

• Góc bù nhau

$$\begin{aligned}\sin(180^0 - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^0 - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^0 - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(180^0 - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\parallel	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	\parallel	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	\parallel

4. Các hệ thức lượng giác cơ bản

- 1) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ($\alpha \neq 90^\circ$) ;
- 2) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ($\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ$)
- 3) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ ($\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ$)
- 4) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- 5) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\alpha \neq 90^\circ$)
- 6) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ($\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ$)

Chứng minh:

- Hệ thức 1), 2) và 3) dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

- Ta có $\sin \alpha = \overline{OQ}$, $\cos \alpha = \overline{OP}$

Suy ra $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 = OQ^2 + OP^2$

+ Nếu $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ hoặc $\alpha = 180^\circ$ thì dễ dàng thấy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

+ Nếu $\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$ khi đó theo định lý Pitago ta có

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = OQ^2 + OP^2 = OQ^2 + QM^2 = OM^2 = 1$$

Vậy ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Mặt khác $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ suy ra được 5)

Tương tự $1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ suy ra được 6)