Đáp án chuyên đề:
Một số ví dụ về phương trình bậc hai hai ẩn – Đại số 10

Bài 3.54: a) Ta có $y = 5 - 2x$ thế vào phương trình hai ta được:

$$4x^2 + (5-2x)^2 = 17 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 4 \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (2;1), (\frac{1}{2};4)$.

b) Ta có $y = 8 - 3x$ thay vào phương trình đầu ta được:

$x^3(8-3x) = 16 \Leftrightarrow 3x^4 - 8x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(3x^2+4x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$. Vậy hệ có nghiệm là $x = y = 2$.

c) Từ phương trình 2 $\Rightarrow x^2 = 3(y^2+2)$ (3) thay vào phương trình 1 ta được :

$$x^3 - 8x = y(y^2+2) = y\frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x(3x^2 - xy - 24) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \end{array}\right.$$

* Với $x = 0$ thay vào (3) ta có: $y^2 + 2 = 0$ vô nghiệm.

* Với $y = \dfrac{3x^2 - 24}{x}$ thay vào (3) ta được: $x^2 = 3\left(\dfrac{3x^2-24}{x}\right)^2 + 6$

$$\Leftrightarrow 13x^4 - 213x^2 + 864 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = \dfrac{96}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{96}{13}} \Rightarrow y = \mp\dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có bốn nghiệm: $(x;y) = (\pm 3; \pm 1),\ (\pm\sqrt{\frac{96}{14}}; \mp\frac{\sqrt{78}}{13})$.

Bài 3.55: Ta có $x = m - y$ thay vào phương trình hai ta được: $2(m-y)^2 - 3y^2 = 1$

$\Leftrightarrow y^2 + 4my + 1 - 2m^2 = 0$ (*). Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - (1 - 2m^2) \ge 0 \Leftrightarrow |m| \ge \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Vậy $|m| \ge \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ là những giải trị cần tìm.

Bài 3.56: a) Đặt $S = x + y,\ P = xy$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} S + 2P = 2 \\ S(S^2 - 3P) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{2-S}{2} \\ S(S^2 - \dfrac{6-3S}{2}) = 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0 \Leftrightarrow (S-2)(2S^2 + 7S + 8) = 0$

$\Leftrightarrow S = 2 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow x, y$ là nghiệm PT: $X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow X = 0, X = 2$.

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

b) Đặt $S = x + y;\ P = xy$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} S(S^2 - 3P) = 19 \\ S(8 + P) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = -8S \\ S^3 - 3(2 - 8S) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 2 - 8S \\ S^3 + 24S - 25 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình :

$X^2 - X - 6 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 3;\ X_2 = -2$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y) = (-2;3),\ (3;-2)$.

c) $(x;y) = (1;1)$ d) $-2;0$, $0;-2$, $-\sqrt{2};\sqrt{2}$, $\sqrt{2};-\sqrt{2}$

Bài 3.57: a) Trừ vế với vế của hai phương trình trên ta được:

$$x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 1 - y \end{array}\right..$$

* Với $x = y \Rightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow x = 0, x = 3$

* Với $x = 1 - y \Rightarrow y^2 = 3y + 2(1 - y) \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y) = (0;0),\ (3;3),\ (-1;2),\ (2;-1)$.

b) Điều kiện : $x, y \neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + x^2y = 3 \\ 2y^3 + y^2x = 3 \end{cases} \Rightarrow 2(x^2 - y^3) + xy(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(Do $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 2(x + \frac{3}{4}y)^2 + \frac{7}{8}y^2 > 0$)

Thay vào hệ ta được: $3x^3 = 3 \Leftrightarrow x = 1 = y$.

Vậy hệ có nghiệm: $x = y = 1$.

c) $-1;-1$, $0;0$, $1;1$, $-\sqrt{3};\sqrt{3}$, $\sqrt{3};-\sqrt{3}$ d) $1;1$

Bài 3.58: • Giả sử hệ có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0 = y_0$.

Thay vào hệ ta được: $x_0^2 - 2x_0 + m = 0$ phương trình này có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

• Với $m = 1$ hệ trở thành: $\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$.Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.59: Ta thấy x=0 không thoả hệ phương trình

Xét $x \neq 0$. Đặt $x = ky$ và thay vào hệ ta được: $\begin{cases} 3x^2 + 5tx^2 - 4t^2x^2 = 38 \\ 5x^2 - 9tx^2 - 3t^2x^2 = 15 \quad (*) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3+5t-4t^2) = 38 \\ x^2(5-9t-3t^2) = 15 \end{cases} \Rightarrow 15\;\; 3+5t-4t^2 \;\; = 38\;\; 5-9t-3t^2$$

$$\Leftrightarrow 54t^2 + 417t - 145 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{145}{18} \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{1}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$

Với $t = -\dfrac{145}{18}$ thì (*) $\Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{15.108}{12655}$: Phương trình vô nghiệm

Vậy $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$.

Bài 3.60: Dễ thấy $x = 0$ không thoả hệ

Với $x \neq 0$, đặt $y = tx$, thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^2(3+2k+k^2) = 11 (*) \\ x^2(1+2k+3k^2) = 17 \end{cases}$

Suy ra $17\;\; 3+2k+k^2 \;\; = 11\;\; 1+2k+3k^2$

$$\Leftrightarrow 16k^2 - 12k - 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -\dfrac{5}{4} \\ k = 2 \end{array}\right.$$

Thay vào (*) ta được:

- $k = -\dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{33}{16}x^2 = 11 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -\dfrac{5}{4}.\dfrac{4}{\sqrt{3}} = -\dfrac{5}{\sqrt{3}} \\ x = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -\dfrac{5}{4}.(-\dfrac{4}{\sqrt{3}}) = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$
- $k = 2 \Rightarrow 11x^2 = 11 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x;y$ là $\left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}};\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right);\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}};-\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right);\;1;2\;;\;-1;-2$

Bài 3.61: Dễ thấy y = 0 không phải là nghiệm của hpt.
Đặt $x = ty$, ta có :

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} t^2y^2 - 4ty^2 + y^2 = m \\ y^2 - 3ty^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(t^2 - 4t + 1) = m \\ y^2(1-3t) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2 - 4t + 1}{1-3t} = \dfrac{m}{4} \\ y^2(1-3t) = 4 \end{cases}$ (I)

Do $y \neq 0$ nên từ $y^2\left(1-3t\right)=4 \Rightarrow 1-3t>0 \Leftrightarrow t<\frac{1}{3}$

a) Với $m=1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{t^2-4t+1}{1-3t}=\dfrac{1}{4} \\ y^2(1-3t)=4 \end{cases}$

Ta có nghiệm là $\left(1;4\right),\left(-1;-4\right)$.

b) Ta có : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(t^2-4t+1)=m(1-3t) \\ y^2(1-3t)=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2-(16-3m)t+4-m=0 \ (*) \\ y^2(1-3t)=4 \end{cases}$

Đặt $f\left(t\right)=4t^2-\left(16-3m\right)t+4-m$ thì

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm thoả mãn $t<\frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số

$f\left(t\right)=4t^2-\left(16-3m\right)t+4-m$ với $t\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ cắt trục hoành $\Leftrightarrow \forall m$

Bài 3.62: a) ĐKXĐ : $\begin{cases} x\geq y \\ x\geq -y \end{cases}$

$\sqrt{x+y}=\sqrt[3]{x+y} \Leftrightarrow (\sqrt{x+y})^6=(\sqrt[3]{x+y})^6$

$\Leftrightarrow (x+y)^3=(x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x+y=1 \end{array}\right.$.

Thay $x=-y$ vào $\sqrt{x-y}=\sqrt[3]{x-y-12}$ ta được $y=-2\Rightarrow x=2$.

b) Đặt $a=x+y+\dfrac{1}{x+y}, b=x-y$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13 \\ (x+y+\dfrac{1}{x+y})+x-y=1 \end{cases}$ nên ta có:

$\begin{cases} 5(a^2-2)+3b^2=13 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2+3b^2=23 \\ a+b=1 \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$ và $\begin{cases} a=-\dfrac{5}{2} \\ b=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ: $(x;y)=\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2};\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{2}\right),\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{11}{4}\right),\left(\dfrac{3}{2};-2\right)$.

Bài 3.63: a) Điều kiện: $x,y>0$

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)+(-\sqrt{xy})=7\\(x+y)(-\sqrt{xy})=-78\end{cases}$$

Suy ra $x+y$ và $-\sqrt{xy}$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2-7t-78=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=13\\t=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=13\\-\sqrt{xy}=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=13\\xy=36\end{array}\right.$$

Suy ra x,y là nghiệm của phương trình: $u^2-13u+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=4\\u=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=9\end{cases}\\\begin{cases}x=9\\y=4\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là $\ 4,9\ ,\ 9,4\ $.

b) Điều kiện :x≥ 0,y≥ 0

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x^2+2y^2}+\sqrt{4xy}=16\\x+y+\sqrt{4xy}=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x^2+2y^2}=x+y\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+2y^2=x^2+y^2+2xy\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2=0\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$$

Vậy hệ có nghiệm là $\ 4;4\ $.

c) Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}S=\sqrt{x}+\sqrt{y}\\P=\sqrt{xy}\end{cases}$, điều kiện $S,P\geq 0$ và $S^2-4P\geq 0$

Khi đó hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}\sqrt{\left[\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\ ^2-2\sqrt{xy}\right]^2-2xy}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\ S^2-2P\ ^2-2P^2}+\sqrt{2P}=8\sqrt{2}\\S=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{P^2-32P+128}=8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}8-P\geq 0\\P^2-32P+128=(8-P)^2\end{cases} \Leftrightarrow P=4$$

Vậy ta được: $\begin{cases}S=4\\P=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\\sqrt{xy}=4\end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$

Bài 3.64: a) Điều kiện: $\begin{cases} x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -x\\ y\le x\end{cases} \Leftrightarrow -x\le y\le x \Rightarrow x\ge 0$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\ \dfrac{1}{2}(x+y)^2\dfrac{1}{2}(x-y)^2=128\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\ (x+y)^2+(x-y)^2=256\end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x+y}\\ v=\sqrt{x-y}\end{cases}, u,v\ge 0$

Ta được: $\begin{cases} u+v=4\\ u^4+v^4=256\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4\\ uv(uv-32)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} uv=0\\ uv=32\end{array}\right.\\ u+v=4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4\\ uv=32\end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} u+v=4\\ uv=0\end{cases}$

Giải hệ ta được nghiệm là $8,8$; $8,-8$.

b) Hệ có nghiệm là $4;9$, $9;4$

c) Hệ có nghiệm là $8;64$, $64;8$

Bài 3.65: • Giả sử hệ có nghiệm $(x_0,y_0)\Rightarrow(y_0-2,x_0+2)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình. Vậy hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0=y_0-2$

Khi đó hệ có dạng: $\begin{cases} \sqrt{y_0-1}+\sqrt{y_0-1}=a\\ y_0-2+y_0=2a+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y_0-1}=a\\ 2y_0=2a+3\end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{2(2a+3)-1}=a \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0\\ 4a-2=a^2\end{cases} \Leftrightarrow a=2+\sqrt{6}$

• Với $a=2+\sqrt{6}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=2+\sqrt{6}\\ x+y=2(2+\sqrt{6})+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=2+\sqrt{6}\\ (x+1)+(y-1)=5+2\sqrt{6}\end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x+1}\\ v=\sqrt{y-1}\end{cases}; u,v\ge 0$. Ta được: $\begin{cases} u+v=2+\sqrt{6}\\ u^2+v^2=5+2\sqrt{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2+\sqrt{6}\\ uv=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{2}\end{cases}$

Suy ra u,v là nghiệm phương trình:

$$t^2-(2+\sqrt{6})t+\frac{1}{2}(5+2\sqrt{6})=0 \Leftrightarrow t=\frac{2+\sqrt{6}}{2} \Rightarrow u=v=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$$