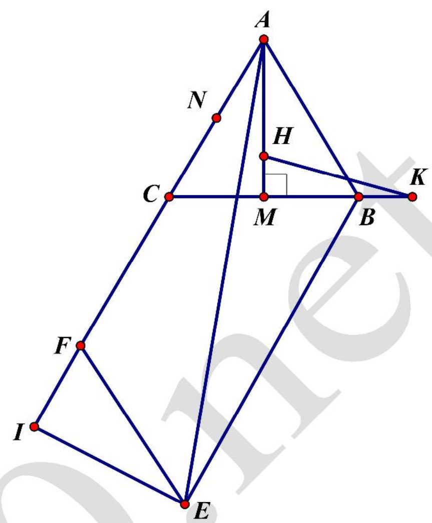
Đáp án chuyên đề:
Tích của một vectơ với một số - Hình học 10

Bài 1.26: a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{AN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NM}$



Suy ra $\left|\overrightarrow{AN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right|=MN=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$

b) Theo quy tắc trừ ta có

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{MN}\right|=AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi F là điểm đối xứng của A qua C,
điểm E là là đỉnh của hình bình hành $ABEF$,
theo quy tắc hình bình hành ta có

$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}$

Gọi I là hình chiếu của E lên AC.

Vì $AB//EF\Rightarrow EIF=CAB=60^0$

$\sin IFE=\frac{IE}{EF}\Rightarrow IE=EF.\sin IFE=a\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\cos IFE=\frac{IF}{EF}\Rightarrow IF=EF.\cos IFE=a\cos 60^0=\frac{a}{2}$

Áp dụng định lí Pitago ta có

$$AE=\sqrt{AI^2+IE^2}=\sqrt{\left(2a+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{28}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=AE=\frac{a\sqrt{28}}{2}$.

d) Lấy các điểm H,K sao cho $0,25\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MH};\ \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MK}$

Suy ra $0,25\overrightarrow{MA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{KH}$

Do đó $\left|0,25\overrightarrow{MA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}\right|=KH=\sqrt{\left(\frac{AM}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{2}MB\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{8}$

Bài 1.27: Gọi O là tâm hình vuông.
Theo quy tắc ba điểm ta có

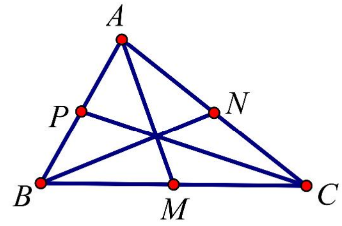
$\vec{u}=\ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\ -2\ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\ +3\ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\ -2\ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}$

$=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD}$

Mà $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ nên $\vec{u}=-2\overrightarrow{OA}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) $\left|\vec{u}\right| = \left|-2\overrightarrow{OA}\right| = 2OA = a\sqrt{2}$



Hình 1.49

Bài 1.28: (hình 1.49)

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} =$

$= \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\ + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\ + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\ = \vec{0}$ b)

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} =$

$\frac{1}{2}\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\ + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\ + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Bài 1.29: a) Ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\ - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH}\ = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

Bài 1.30: Ta có $\frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC} = \frac{MC}{BC}\ \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\ + \frac{MB}{BC}\ \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$

$= \overrightarrow{AM} + \frac{MC}{BC}\overrightarrow{MB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$

Bài 1.31: Ta có:

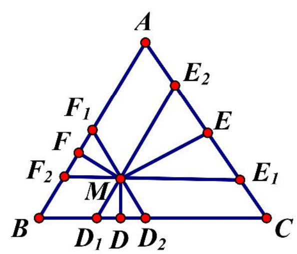
$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} =\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'}\ +\ \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}\ +\ \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'}$

$=\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\ - \overrightarrow{AC} -\ \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}\ + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Bài 1.15: (hình 1.50) Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh Δ ABC, các đường thẳng này lần lượt cắt tại các điểm như hình vẽ. Dễ

thấy ta có các tam giác đều MD_1D_2, ME_2E_2, MF_1F_2 và các hình bình hành

MF_1AE_2, ME_1CD_2, MD_1BF_2.



Hình 1.50

Ta có: $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MD_1} + \overrightarrow{MD_2})$,

$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ME_1} + \overrightarrow{ME_2})$,

$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MF_1} + \overrightarrow{MF_2})$.

Cộng từng vế 3 đẳng thức và nhóm ta được: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Bài 1.32: Ta gọi M là trung điểm AB và M' là hình chiếu của M lên d. Khi đó, ta có:

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{MM'}$

Gọi N là trung điểm của GC (ta cũng có G là trung điểm MN) và N' là hình chiếu của nó lên d thì:

$\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{NN'}$, $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{NN'} = 2\overrightarrow{GG'}$.
Từ ba đẳng thức trên ta có đpcm.

Bài 1.33: Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

Vì ngũ giác đều nên vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ cùng phương với $\overrightarrow{OF}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{OF}$.

Tương tự $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{OE}$ suy ra $\vec{u} = \vec{0}$.

Bài 1.34: Giả sử n vectơ là $\overrightarrow{a_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_n}$

Vì tổng của $n-1$ vectơ bất kì trong n vectơ trên cùng phương với vectơ còn lại do đó $\vec{u}$ cùng phương với hai vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ nên $\vec{u} = \vec{0}$.

Bài 1.35: (hình 1.51)

a) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC ta có

$$a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right);\ b = r\left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right);\ c = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)$$

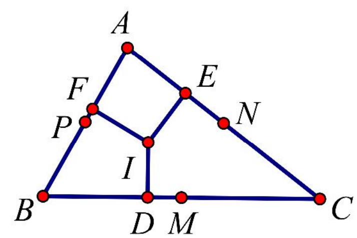
Theo ví dụ 5 ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)\overrightarrow{IA} + \left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right)\overrightarrow{IB} + \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

b) Ta có $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\ ;\ \overrightarrow{IN} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IP} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$

Theo câu a) ta có

$$\cot\frac{A}{2}\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\ + \cot\frac{B}{2}\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\ + \cot\frac{C}{2}\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\ = \vec{0}$$



Hình 1.51

Suy ra $\cot\frac{A}{2}\overrightarrow{IM} + \cot\frac{B}{2}\overrightarrow{IN} + \cot\frac{C}{2}\overrightarrow{IP} = \vec{0}$

c) Ta có

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM};\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IN};\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IP}$$

Kết hợp ví dụ 5 suy ra

$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow\ b + c - a\ \overrightarrow{IM} +\ a + c - b\ \overrightarrow{IN} +\ a + b - c\ \overrightarrow{IP} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{ID} = \dfrac{DC}{BC}\overrightarrow{IB} + \dfrac{DB}{BC}\overrightarrow{IC} = \dfrac{p-c}{a}\overrightarrow{IB} + \dfrac{p-b}{a}\overrightarrow{IC}$

$\Leftrightarrow a\overrightarrow{ID} =\ p - c\ \overrightarrow{IB} +\ p - a\ \overrightarrow{IC}$ với p là nửa chu vi.

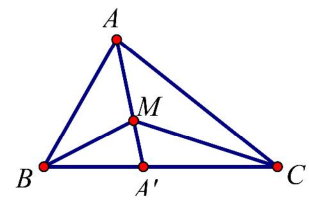
Tương tự ta có :

$b\overrightarrow{IE} =\ p - a\ \overrightarrow{IC} +\ p - c\ \overrightarrow{IA};\ c\overrightarrow{IF} =\ p - b\ \overrightarrow{IA} +\ p - a\ \overrightarrow{IB}$

$\Rightarrow a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} =\ 2p - b - c\ \overrightarrow{IA} +\ 2p - c - a\ \overrightarrow{IB} +\ 2p - a - b\ \overrightarrow{IC}$

$= a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} \Rightarrow a\overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{BE} + c\overrightarrow{CF} = \vec{0}$

Bài 1.36: (hình 1.52)Gọi A' là giao điểm AM với BC ta có $\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$ (*)



Hình 1.52

Mặt khác $\frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} \Rightarrow \frac{A'C}{A'B} + 1 = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} + 1$

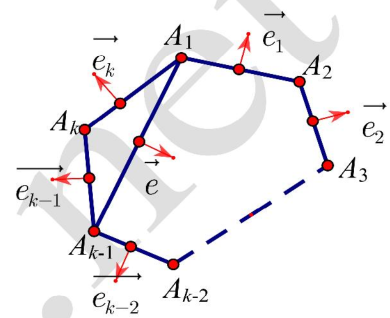
$\Rightarrow \frac{A'B}{BC} = \frac{S_{MAB}}{S_{MAB} + S_{MAC}}$

Và $\frac{A'C}{BC} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB} + S_{MAC}}$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{MA'} = -\frac{MA'}{MA}\overrightarrow{MA} = -\frac{S_{MBC}}{S_{MAB} + S_{MAC}}\overrightarrow{MA}$ (2)

Thay (1) và (2) vào (*) ta được điều phải chứng minh.

Bài 1.37: (hình 1.53)Ta chứng minh bằng quy nạp



Hình 1.53

Với $n = 3$ đẳng thức trở thành $a.\vec{e_1} + b.\vec{e_2} + c.\vec{e_3} = \vec{0}$ (đúng vì đẳng thức này tương đương với đẳng thức ở bài 11)

Giả sử đúng với $n = k - 1,\ k \geq 4$

Gọi $\vec{e}$ là vectơ đơn vị vuông góc với A_1A_{k-1} và hướng ra ngoài tam giác $A_1A_{k-1}A_k$

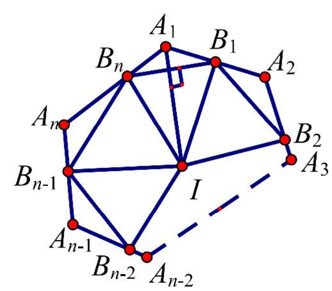
Theo giả thiết quy nạp ta có

$A_1A_2\vec{e_1} + A_2A_3\vec{e_2} + ... + A_{k-2}A_{k-1}\overrightarrow{e_{k-2}} + A_{k-1}A_1 \ \ -\vec{e} \ = \vec{0}$ (1)

Mặt khác xét tam giác $A_1A_{k-1}A_k$ ta có $A_1A_{k-1}\vec{e} + A_{k-1}A_k\overrightarrow{e_{k-1}} + A_kA_1\vec{e_k} = \vec{0}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.38: (hình 1.54)Gọi $B_i,\ i = 1,2,...,n$ là các tiếp điểm đường tròn nội tiếp với cạnh A_iA_{i+1}



Hình 1.54

Xét tứ giác $A_1B_1IB_n$ có $A_1B_nI = A_1B_1I = 90^0$ và $B_nA_1I = B_1A_1I$

Suy ra $B_nIA_1 = B_1IA_1$. Mặt khác $IB_1 = IB_n$ dó đó $IA_1 \perp B_1B_n$

Tương tự ta có $IA_i \perp B_{i-1}B_i, i = 2,3,...,n$

Xét đa giác lồi $B_1B_2...B_n$ theo định lý con nhím ta có

$B_nB_1.\vec{e_1} + B_1B_2.\vec{e_2} + ... + B_{n-1}B_n.\vec{e_n} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow IB_1.\cos\frac{A_1}{2}\vec{e_1} + IB_2.\cos\frac{A_2}{2}\vec{e_2} + ... + IB_n.\cos\frac{A_n}{2}\vec{e_n} = \vec{0}$

Mà $IB_1 = IB_2 = ... = IB_n$ suy ra đpcm.

Bài 1.39: Ta có $\frac{HB}{HC} = \frac{HB.BC}{HC.BC} = \frac{c^2}{b^2}$,

Suy ra $\overrightarrow{IH} = \frac{b^2}{c^2 + b^2}\overrightarrow{IB} + \frac{c^2}{c^2 + b^2}\overrightarrow{IC}$

Mà $b^2 + c^2 = a^2$ và $\overrightarrow{IH} = -\overrightarrow{IA}$ nên suy ra $-\overrightarrow{IA} = \frac{b^2}{a^2}\overrightarrow{IB} + \frac{c^2}{a^2}\overrightarrow{IC}$

Hay $a^2\overrightarrow{IA} + b^2\overrightarrow{IB} + c^2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Bài 1.40: O nằm trong đoạn IK sao cho $OI = 2OK$

Bài 1.41: a) I là điểm đối xứng của A qua B.

b) $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Bài 1.42: a) Cho $M \equiv I \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Với J là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của JC

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MI} \Rightarrow k = 4$

b) $k = 4$, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\ 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

c) $k = 2$, $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}$

Bài 1.43: M trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác

Bài 1.44: a) Vì $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \Rightarrow \ \alpha + \beta \ + \ \beta + \gamma \ + \ \gamma + \alpha \ \neq 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $\alpha + \beta \neq 0 \Rightarrow \exists!\, D : \alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

Suy ra $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \ \alpha + \beta \ \overrightarrow{MD} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Do đó tồn tại duy nhất điểm M

b) Giả sử tồn tại điểm N và $\alpha \neq 0$

Ta có $\alpha\overrightarrow{NA} + \beta\overrightarrow{NB} + \gamma\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB}$ (mâu thuẫn với ABC là tam giác)

Bài 1.45: O là điểm tùy ý, ta có:

$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow k_1\ \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}\ + k_2\ \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}\ + \ldots + k_n\ \overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}\ = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\ k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{OA_n}$

Suy ra G xác định duy nhất

Bài 1.46: a) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow$ M, N, P thẳng hàng

Bài 1.47: a) $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{IG} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 5\overrightarrow{IJ} = 6\overrightarrow{IG}$ suy ra IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 1.48: a) Ta có: $2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$

$5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$$

Bài 1.49: a) $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v} \Leftrightarrow$ có số thực k sao cho

$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \vec{a} + \ 2x-1\ \vec{b} = k\ \ x\vec{a} + \vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx = 1 \\ k = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

b) $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v} \Leftrightarrow$ có số thực k dương sao cho

$\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow 3\vec{a} + x\vec{b} = k\left(\ 1-x\ \ \vec{a} - \dfrac{2}{3}\vec{b}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = k\ \ 1-x \\ x = -\dfrac{2}{3}k \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{3}{2} \\ k = -3(l) \end{array}\right. \Rightarrow x = -1$$

Bài 1.50: Ta có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$

$$= \ \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} \ + \ \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} \ + \ \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$$

$$= 3\overrightarrow{GG'} + \ \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} \ + \ \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} \ = 3\overrightarrow{GG'}$$

Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Bài 1.51: G là trọng tâm $\Delta RIP \Rightarrow \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \ \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{JA} \ + \ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ} \ + \ \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}$

$= \ \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS} \ + \ \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{IB} \ + \ \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PC} \ = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} \Rightarrow \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}$

Do đó G là trọng tâm ΔJQS

Bài 1.52: Tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm $\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow 2.\vec{0} = \vec{0}$ (đúng)

Bài 1.53: G là trọng tâm $\Delta ANP \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} \Rightarrow \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

Do đó G là trọng tâm ΔCMQ

Bài 1.54: G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Ta có $2011\overrightarrow{A'B} + 2012\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2011\ \ \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}\ \ + 2012\ \ \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC}\ \ = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4023\overrightarrow{A'A} + 2011\overrightarrow{AB} + 2012\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ (1)

Tương tự ta có $4023\overrightarrow{B'B} + 2011\overrightarrow{BC} + 2012\overrightarrow{BA} = \vec{0}$; $4023\overrightarrow{C'C} + 2011\overrightarrow{CA} + 2012\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

Cộng vế với vế lại ta được

$4023\ \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\ \ +\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ Suy ra

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'} \Rightarrow \overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

Do đó G là trọng tâm $\Delta A'B'C'$

Bài 1.55: Vì ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm G suy ra $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Vì G_1, G_2, G_3 là trọng tâm các tam giác BCA', CAB', ABC' nên

$3\overrightarrow{AG_1}+3\overrightarrow{BG_2}+3\overrightarrow{CG_3}$

$= \ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}\ +\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}\ +\ \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}$

$=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{CG_3}=\vec{0}$ do đó G là trọng tâm $\Delta G_1G_2G_3$

Bài 1.56: G là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4 \Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}+\overrightarrow{GG_4}=\vec{0}$ (*)

Vì G_1 là trong tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GG_1}$, tương tự ta có

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GG_2}$, $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{GG_3}$, $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GG_4}$

Do đó (*) $\Leftrightarrow 3\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\ \ =\vec{0}$ (đúng) đpcm

Bài 1.57: Gọi D, E, F tương ứng là giao điểm của MA_1, MB_1, MC_1 với các cạnh BC, CA, AB. O là trọng tâm đều ΔABC

Ta có $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}=2\ \ \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$

Mặt khác theo bài tập 6 (dạng 2) thì $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Suy ra $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}=3\overrightarrow{MO}$ do đó O là trọng tâm tam giác A_1, B_1, C_1

Bài 1.58: Ta có $\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2}=\dfrac{OA_2}{OA_1}\overrightarrow{OA_1}+\dfrac{OB_2}{OB_1}\overrightarrow{OB_1}+\dfrac{OC_2}{OC_1}\overrightarrow{OC_1}$

$=a\dfrac{\overrightarrow{OA_1}}{OA_1}+b\dfrac{\overrightarrow{OB_1}}{OB_1}+c\dfrac{\overrightarrow{OC_1}}{OC_1}=\vec{0}$ (Theo định lý con nhím)

Do đó O là trọng tâm tam giác $A_2B_2C_2$

Bài 1.59: a) Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{AB}{2}$ với I là trung điểm của AB

b) Gọi K là điểm thoả mãn: $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

L là điểm thoả mãn: $\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

Ta có: $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MK}\right|=\left|\overrightarrow{ML}\right|$

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

Bài 1.60: a) Ta có:

$\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=k(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và song song với cạnh BC của ΔABC.

b) Gọi J là trung là điểm AB, I là trung điểm JC ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MI}$

Do đó $\vec{v}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ M thuộc đường thẳng đi qua I và song song với BC.

Bài 1.61: a) Gọi K là điểm thoả mãn: $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

L là điểm thoả mãn: $3\overrightarrow{LB}-2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

Ta có: $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MK}\right|=\left|\overrightarrow{ML}\right|$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

b) Với I là trung điểm của BC. Gọi J là điểm thoả mãn: $4\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

Ta có:

$\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow \left|6\overrightarrow{MJ}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MI}\right| \Leftrightarrow \left|6\overrightarrow{MJ}\right|=\left|2\overrightarrow{IA}\right| \Leftrightarrow MJ=\dfrac{1}{3}IA$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm J bán kính $R=\dfrac{1}{3}IA$.

Bài 1.62: a) $\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{CI}$ với I là trung điểm BD

b) $\left|\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right|=\left|3\overrightarrow{MA}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MO}\right|=\left|\overrightarrow{MA}\right|$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn OA.

Bài 1.63: Gọi P là trọng tâm của ΔABC, Q là trọng tâm của ΔDEF

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|=$

$3\left|\overrightarrow{MP}\right|+3\left|\overrightarrow{MQ}\right|=3\ \ MP+MQ\ \ \ge 3QP$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn PQ

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là mọi điểm thuộc đoạn PQ

Bài 1.64: Gọi hai điểm M_0, N_0 lần lượt thuộc tia Ox và Oy sao cho $OM_0=ON_0=\dfrac{a}{2}$. Giả sử $OM=k, 0\le k\le a$ khi đó ta có $\overrightarrow{MI}=\dfrac{a-k}{a}\overrightarrow{M_0N_0}$. Do đó tập hợp điểm I là đoạn M_0N_0

Bài 1.65: Đặt $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OC}=y\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OB}=z\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OD}=t\overrightarrow{BD}$

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0} \Leftrightarrow\ \ x+y\ \ \overrightarrow{AC}+\ \ z+t\ \ \overrightarrow{BD}=\vec{0}$

Do đó $x=-y; z=-t \Rightarrow OA=OC, OB=OD$ nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 1.66: Ta có $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}+\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CA'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow$ AA' cũng là trung tuyến của tam giác ABC.

Bài 1.67: Giả sử $\overrightarrow{A'B} = k\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{B'C} = m\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{C'A} = n\overrightarrow{C'B}$

$$\overrightarrow{A'B} = k\overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = k\ \ \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}\ \ \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k}$$

Tương tự ta có $\overrightarrow{BB'} = \dfrac{\overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA}}{1-m} = \dfrac{m-1\ \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{1-m}$,

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA} - n\overrightarrow{CB}}{1-n} = \frac{-n\overrightarrow{AB} +\ \ n-1\ \ \overrightarrow{AC}}{1-n}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-k} - 1 - \frac{n}{1-n}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{-k}{1-k} + \frac{1}{1-m} - 1\right)\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Suy ra $\Rightarrow \dfrac{1}{1-k} - 1 - \dfrac{n}{1-n} = \dfrac{-k}{1-k} + \dfrac{1}{1-m} - 1 = 0 \Rightarrow k = m = n$.

Mặt khác theo định lí Xêva ta có $kmn = -1$ nên $k = m = n = -1$

Vậy AA', BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC

Bài 1.68: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IJ}$

Gọi K là trung điểm DC suy ra $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IK}$ do đó $K \equiv J$ hay J là trung điểm của CD.

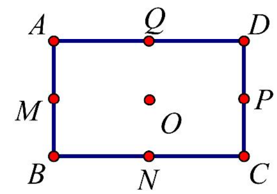
Bài 1.69: (hình 1.55) Gọi M, N, P, Q là trung điểm của AB, BC, CD, DA từ phương trình thứ hai ta được:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow M, P, O$ thẳng hàng và O là trung điểm MP

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow N, Q, O$ thẳng hàng và O là trung điểm NQ.



Hình 1.55

Ta có ΔOAD cân tại O nên $NQ \perp AD$, ΔOBC cân tại O nên $NQ \perp BC$ suy ra $AD//BC$.

Tương tự $AB//DC$ suy ra $ABCD$ là hình bình hành

Mà N, Q là trung điểm của BC, AD nên $AB//NQ \Rightarrow AB \perp BC$

Suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật.

Bài 1.70: G là trọng tâm tam giác ABC nên $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Do đó $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$

Suy ra G là trực tâm tam giác $A'B'C'$

Bài 1.71: H là trực tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Do đó $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ hay H là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Bài 1.72: Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau

Cho ba véc tơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đôi một không cùng phương và thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \\ m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c} = \vec{0} \end{cases} \quad m, m' \neq 0$$

Chứng minh rằng : $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{n}{n'} = \dfrac{p}{p'}$. Thật vậy :

Dễ thấy $m, m' \neq 0$ thì suy ra ngay n, n', p, p' cũng phải khác không.

Từ giả thiết ta có : $\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{n}{m}\vec{b} + \dfrac{p}{m}\vec{c} \\ \vec{a} = \dfrac{n'}{m'}\vec{b} + \dfrac{p'}{m'}\vec{c} \end{cases}$

vì một véc tơ chỉ phân tích được một cách duy nhất qua hai véc tơ không cùng phương nên $\dfrac{n}{m} = \dfrac{n'}{m'}; \dfrac{p}{m} = \dfrac{p'}{m'} \Rightarrow \dfrac{m}{m'} = \dfrac{n}{n'} = \dfrac{p}{p'}$

Trở lại bài toán

Ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{AD}{MA}\overrightarrow{MA} + \dfrac{BE}{MB}\overrightarrow{MB} + \dfrac{CF}{MC}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Mặt khác $\dfrac{AD}{MA} = \dfrac{S_{ABD}}{S_{ABM}} = \dfrac{S_{ADC}}{S_{ACM}} = \dfrac{S}{S - S_a}$, tương tự $\dfrac{BE}{MB} = \dfrac{S}{S - S_b}$ và $\dfrac{CF}{MC} = \dfrac{S}{S - S_c}$

(với $S = S_{ABC}, S_a = S_{MBC}, S_b = S_{MCA}, S_c = S_{MAB}$)

Do đó ta có $\dfrac{\overrightarrow{MA}}{S - S_a} + \dfrac{\overrightarrow{MB}}{S - S_b} + \dfrac{\overrightarrow{MC}}{S - S_c} = \vec{0}$

Mặt khác ta cũng có $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Áp dụng bổ đề suy ra $\dfrac{\frac{1}{S - S_a}}{S_a} = \dfrac{\frac{1}{S - S_b}}{S_b} = \dfrac{\frac{1}{S - S_c}}{S_c} \Leftrightarrow S_a = S_b = S_c$ hay M trùng trọng tâm tam giác ABC

Bài 1.73: Do $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ nên tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + \gamma(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MI} + \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MI}$

Do đó $T = \left|\alpha + \beta + \gamma\right|.MI$

Suy ra T nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d

Bài 1.74: G là trọng tâm tam giác ABC ta có $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MG}\right|$

a) M là giao điểm của tia GO với (C)

b) M là giao điểm của tia OG với (C)

Bài 1.75: ĐS: $\min T = 4GG'$

Bài 1.76: Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = -\left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}\right| \leq \left|\overrightarrow{BN}\right| + \left|\overrightarrow{CP}\right|$

Vì $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{CP}$ không cùng phương nên không thể xảy ra dấu bằng do đó $AM < BN + CP$. Tương tự ta có $BN < AM + CP, CP < AM + BN$

Bài 1.77: $\overrightarrow{CM} = \dfrac{MB}{AB}\overrightarrow{CA} + \dfrac{MA}{AB}\overrightarrow{CB} \Rightarrow MC < \dfrac{MB}{AB}CA + \dfrac{MA}{AB}CB$

Hay $MC.AB < MA.BC + MB.AC$

Bài 1.78: Ta có: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{MD}{CD}\overrightarrow{AC} + \dfrac{MC}{CD}\overrightarrow{AD} \Rightarrow AM < \dfrac{MD}{CD}AC + \dfrac{MC}{CD}AD$

và $\overrightarrow{BM} = \dfrac{MD}{CD}\overrightarrow{BC} + \dfrac{MC}{CD}\overrightarrow{BD} \Rightarrow BM = \dfrac{MD}{CD}BC + \dfrac{MC}{CD}BD$

Từ đó suy ra

$$AM + BM < \frac{MD}{CD}\ AC + BC\ + \frac{MC}{CD}\ AD + BD$$

$$\Rightarrow AM + BM < \left(\frac{MD}{CD} + \frac{MC}{CD}\right).\max\ \ AC + BC; AD + BD$$

$$\Rightarrow p < \max\ \ AC + BC + AB; AD + BD + AB$$

Hay $p < \max\ \ p_1; p_2$

Bài 1.79: Ta chứng minh bằng quy nạp

+ Với $n = 0$: hiển nhiên

+ Giả sử BĐT đúng với $n = k$ ta đi chứng minh đúng với $n = k + 1$ hay $\left|\sum_{i=1}^{2k+3}\overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1$

Trong $2k + 3$ vectơ ta chọn hai vectơ có góc lớn nhất, giả sử $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_{2k+3}}$.

Đặt $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{2k+3}}$, $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=2}^{2k+2}\overrightarrow{OP_i}$.

Suy ra điểm A, B nằm trong góc P_1OP_{2k+3} do đó $AOB \leq 90^0$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| \geq \left|\overrightarrow{OB}\right|$$

Mặt khác theo giả thiết quy nạp ta có $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\sum_{i=2}^{2k+2}\overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1$

Suy ra $\left|\sum_{i=1}^{2k+3}\overrightarrow{OP_i}\right| = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| \geq \left|\overrightarrow{OB}\right| \geq 1$