Đáp án chuyên đề:
Phương trình bậc nhất và bậc hai một ẩn – Đại số 10

Bài 3.5: a) Phương trình tương đương với $2m-4\ \ x=m-2$

+ Với $2m-4=0\Leftrightarrow m=2$: Phương trình trở thành $0x=0$
Suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi x.
+ Với $2m-4\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$: Phương trình tương đương với $x=-1$
Kết luận
$m=2$: Phương trình nghiệm đúng với mọi x
$m\neq 2$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$
b) Phương trình tương đương với $3m^2-m-2\ \ x=1-m$

+ Với $3m^2-m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$:

- Khi $m=1$: Phương trình trở thành $0x=0$ phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Khi $m=-\dfrac{2}{3}$: Phương trình trở thành $0x=\dfrac{5}{3}$ suy ra phương trình vô nghiệm

+ Với $3m^2-m-2\neq 0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 1 \\ m\neq -\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$: PT $\Leftrightarrow x=\dfrac{1-m}{3m^2-m-2}=\dfrac{-1}{3m+2}$.

Kết luận:
$m=-\dfrac{2}{3}$: Phương trình vô nghiệm
$m=1$: Phương trình nghiệm đúng với mọi x
$m=-\dfrac{2}{3}$ và $m=1$: Phương trình có nghiệm $x=\dfrac{-1}{3m+2}$

Bài 3.6: a) ĐK: a ≠ 0; b ≠ 0.
(1) $\Leftrightarrow b\ \ x+a-b\ \ -a\ \ x+b-a\ \ =b^2-a^2$
$\Leftrightarrow bx+ab-b^2-\text{ax}-ab+a^2=b^2-a^2$
$\Leftrightarrow\ \ b-a\ \ x=2\ \ b-a\ \ \ b+a$

-Nếu b – a ≠ 0 $\Rightarrow b\neq a$ thì $x=\dfrac{2\ \ b-a\ \ \ b+a}{b-a}=2\ \ b+a$
-Nếu b – a = 0 $\Rightarrow b=a$ thì phương trình có vô số nghiệm.
Vậy: -Với b ≠ a, phương trình có nghiệm duy nhất x = 2(b + a).
-Với b = a, phương trình có vô số nghiệm
b) ĐKXĐ: $x\neq \pm 1$
$\Leftrightarrow\ \ ax-1\ \ \ x+1\ \ +2\ \ x-1\ \ =a\ \ x^2+1$

$\Leftrightarrow ax^2 + ax - x - 1 + 2x - 2 = ax^2 + a$

$\Leftrightarrow \;\; a + 1 \;\; x = a + 3$

-Nếu $a + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1$ thì $x = \dfrac{a+3}{a+1}$

-Nếu $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy: -Với $a \neq -1$ và $a \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a+3}{a+1}$

-Với $a = -1$ hoặc $a = -2$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 3.7: a) Ta có $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1 \Leftrightarrow (m^2 - m - 2)x = m^2 - 1$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình vô nghiệm

b) Ta có PT $\Leftrightarrow \;\; m^2 - 1 \;\; x = m^3 - 3m + 2$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m^3 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

Vậy với $m = -1$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 3.8: a) Ta có

$a \;\; bx - a + 2 \;\; = \;\; a + b - 1 \;\; x + 1 \Leftrightarrow \;\; ab - a - b + 1 \;\; x = a^2 - 2a + 1$

$\Leftrightarrow \;\; a - 1 \;\; b - 1 \;\; x = \;\; a - 1 \;\;^2$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 \;\; b - 1 \;\; \neq 0 \\ \begin{cases} a - 1 \;\; b - 1 \;\; = 0 \\ a - 1 \;\;^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \neq 1 \\ b \neq 1 \end{cases} \\ a = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \neq 1$

Vậy $a \neq 1$ là điều kiện cần tìm.

b) Phương trình tương đương với

$b \;\; 2x - a \;\; - ab^2 = a \;\; 2x - b \;\; - a^2b \Leftrightarrow 2 \;\; a - b \;\; x = ab \;\; a - b$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b \neq 0 \\ \begin{cases} a - b = 0 \\ ab \;\; a - b \;\; = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \neq b \\ a = b \end{array}\right.$ đúng với mọi a, b

Vậy với mọi a, b khác không thì phương trình có nghiệm.

Bài 3.9: $\Delta = 9m^2 - 4 \;\; 2m^2 - m - 1 \;\; = 9m^2 - 8m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2$

Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta = (m+2)^2 = 0 \Rightarrow m = -2$

Nghiệm kép đó là $x_1 = x_2 = \dfrac{3m}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$.

Bài 3.10: a) Với $m = -2$ ta có phương trình:
$-2x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$, phương trình này có hai nghiệm phân biệt
$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

b) Với $m = 0$ ta thấy phương trình vô nghiệm
Với $m \neq 0$ thì phương trình có nghiệm khi và chỉ khi
$\Delta' = m^2 - m\ \ m+1\ \ \geq 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Bài 3.11: a) * $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 : Pt \Leftrightarrow -6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

* $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 : \Delta' = (m+1)^2 - (m-2)(m-5) = 9m - 9 = 9(m-1)$
+ $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 9(m-1) < 0 \Leftrightarrow m < 1$: Phương trình vô nghiệm.
+ $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 9(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$: Phương trình có nghiệm kép $x = \dfrac{m+1}{m-2} = -2$.
+ $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9(m-1) > 0 \Leftrightarrow m > 1$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m+1+3\sqrt{m-1}}{m-2} \\ x = \dfrac{m+1-3\sqrt{m-1}}{m-2} \end{array}\right.$$

Kết luận:
+ $m < 1$: Phương trình vô nghiệm
+ $m = 1$: phương trình có nghiệm $x = -2$
+ $m = 2$: phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$
+ $1 < m \neq 2$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m+1+3\sqrt{m-1}}{m-2} \\ x = \dfrac{m+1-3\sqrt{m-1}}{m-2} \end{array}\right.$

b) * $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, khi đó (1) $\Leftrightarrow -3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$.
* $m \neq 2$, khi đó (1) là phương trình bậc hai có: $\Delta = -4m + 17$.
 i) $m > \dfrac{17}{4} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm
 ii) $m = \dfrac{17}{4} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (1)$ có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = \frac{2m-1}{2(m-2)} = \frac{10}{3}.$$

iii) $m < \dfrac{17}{4} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2m-1+\sqrt{-4m+17}}{2(m-2)}\ ;\ x_2 = \frac{2m-1-\sqrt{-4m+17}}{2(m-2)}.$$

Kết luận: * $m=2$ phương trình có một nghiệm $x=\frac{4}{3}$

* $m>\frac{17}{4}$ phương trình vô nghiệm.

* $m=\frac{17}{4}$ phương trình có nghiệm kép $x=\frac{10}{3}$.

* $\begin{cases} m<\frac{17}{4} \\ m\neq 2 \end{cases}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2}=\frac{2m-1\pm\sqrt{-4m+17}}{2(m-2)}$.

Bài 3.12: Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và Parabol (P) là nghiệm của :

$(m-1)x^2+2mx+3m-1=2x+m \Leftrightarrow (m-1)x^2+2(m-1)x+2m-1=0$ (*)

• Với $m=1$ ta thấy (*) vô nghiệm nên d và (P) không có giao điểm

• Với $m\neq 1$ thì (*) là phương trình bậc hai có

• $\Delta' = (m-1)^2-(m-1)(2m-1)=-m(m-1)$

Do đó ta có các trường hợp sau:

TH1: Nếu $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ thì $\Delta'<0$ nên (*) vô nghiệm nên d và (P) không có giao điểm

TH2: Nếu $m=0$ thì $\Delta'=0$ và (*) có một nghiệm $x=-1$

TH3: Nếu $m\in(0;1)$ thì $\Delta'>0$ và (*) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{m(1-m)}}{m-1}$$

Bài 3.13: a) Phương trình $2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$

Suy ra $f(x)=(2x-3)(x-1)$

b) $g(x)=2(x^2+2)(x^2-9)=2(x^2+2)(x-3)(x+3)$

c) $P(x;y)=(x-2y)(3x+y)$

d) $Q(x;y)=(x-2y-1)(x+y+1)$

Bài 3.14: $f(x)=(x^2+m)(2x+m+1)$

Bìa 3.15: Ta có $\Delta = 3^2 + 4 = 13 > 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lí Viét ta có: $x_1 + x_2 = 3, x_1x_2 = -1$.

Khi đó: $A = 11$, $B = 83, C = 3\sqrt{13}$.

Bài 3.16: Trước hết phương trình phải có hai nghiệm khác 0 nên:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 + 4m + 1 > 0 \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{m^2 - 4m + 1}{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 1 > 0 \\ m^2 - 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \quad (*).$$

Khi đó theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{4\ \ 1 - m}{3}$; $\ x_1x_2 = \dfrac{m^2 - 4m + 1}{3}$

Ta có: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}\ \ x_1 + x_2 \ \Leftrightarrow\ \ x_1 + x_2\ \ \ x_1x_2 - 2\ \ = 0$ (Do $x_1x_2 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1x_2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m^2 - 4m - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 1, m = -1, m = 5.$$

Thay vào (*) ta thấy $m = -1$ không thỏa mãn

Vậy $m = 1, m = 5$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.17: Ta có phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow\ \ m - 1\ ^2 -\ \ m^2 - 3\ \ \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2\ (*)$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1.x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

a) $x_1 + x_2 = 2x_1x_2 \Leftrightarrow 2m - 2 = 2\ \ m^2 - 3\ \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn (*))

b) $A = 2\ \ x_1 + x_2\ ^2 - 5x_1x_2 = 2\ \ 2m - 2\ \ - 5\ \ m^2 - 3$

$$= -5m^2 + 4m + 11 = -5\left(m - \frac{2}{5}\right)^2 + 3 \leq 3$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = \dfrac{2}{5}$

c) $B = \dfrac{x_1x_2}{x_1 + x_2\ ^2 - 3x_1x_2} = \dfrac{m^2 - 3}{2m - 2\ ^2 - 3\ \ m^2 - 3} = \dfrac{m^2 - 3}{m^2 - 8m + 13}$

Suy ra $\min B = -\dfrac{1}{3}$ khi và chỉ khi $m = 1$

Bài 3.18: • Giả sử hai phương trình đã cho có nghiệm chung x_0, thế thì ta phải có:

$$\begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 - 4m + 1 = 0 \\ x_0^2 + \ 3m + 1 \ x_0 + 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{x_0^2 + 1}{2x_0 + 4} \\ m = \dfrac{-x_0^2 - x_0 - 1}{3x_0 + 2} \end{cases} \text{với } \begin{cases} x_0 \neq -2 \\ x_0 \neq -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{x_0^2 + 1}{2x_0 + 4} = \dfrac{-x_0^2 - x_0 - 1}{3x_0 + 2}$

$\Leftrightarrow \ x_0 + 1 \ \ 5x_0^2 + 3x_0 + 6 \ = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow m = 1$

• Với $m = 1$ ta thấy (1) và (2) có nghiệm chung là $x = -1$.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.19: Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình.

Ta có: $\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + b = 0 \\ x_0^2 + mx_0 + n = 0 \end{cases} \Rightarrow (a - m)x_0 = n - b$ (*).

+) Nếu $a - m = 0 \Leftrightarrow a = m$, từ (*)$\Rightarrow n - b = 0 \Leftrightarrow b = n \Rightarrow$ đúng.

+) Nếu $m \neq a$, từ (*) $\Rightarrow x_0 = \dfrac{n - b}{a - m}$ thay vào một trong hai phương trình ban đầu ta được:

$$\left(\frac{n - b}{a - m}\right)^2 + a\left(\frac{n - b}{a - m}\right) + b = 0 \Leftrightarrow \ n - b \ ^2 = \ m - a \ \ an - bm$$

Bài 3.20: • Nếu trong ba số a, b, c có một số bằng 0, chẳng hạn $a = 0 \Rightarrow (2)$ có nghiệm $x = 0$.

• $abc \neq 0$, khi đó ba phương trình đã cho là ba phương trình bậc hai lần lượt có biệt thức: $\Delta'_1 = b^2 - ac;\ \Delta'_2 = c^2 - ab;\ \Delta'_3 = a^2 - bc$.

Ta có: $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \dfrac{1}{2}\left[\ a - b\ )^2 + \ b - c\ ^2 + \ c - a\ ^2\right] \geq 0$.

Suy ra trong ba số $\Delta'_1;\ \Delta'_2;\ \Delta'_3$ có ít nhất một số không âm hay ba phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có nghiệm. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.21: a) Ta có: $b^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2 \geq 4$.

b) Do phương trình đã cho có hai nghiệm dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1\,x_2 \geq 1$ nên $b^2 \geq 4c$, và

$b \leq -2$ suy ra $P \geq \dfrac{2b^2 + b + 2}{b^2 + 1}$. Ta có

$$P-\frac{8}{5}=\frac{5(2b^2+b+2)-8(b^2+1)}{b^2+1}=\frac{2b^2+5b+2}{b^2+1}=\frac{(b+2)(2b+1)}{b^2+1}\geq 0$$ với mọi $b\leq -2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b=-2, c=1$.

Vậy $P_{\min}=\frac{8}{5}$ khi $b=-2, c=1$.

Bài 3.22: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$.

Ta có: $Q=\dfrac{18-9\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}{9-3\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\dfrac{18+9(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}$.

• Ta tìm Max của Q.

Ta đánh giá $(x_1+x_2)^2$ qua x_1x_2 với điều kiện $x_1, x_2\in[0;3]$.

Giả sử $0\leq x_1\leq x_2\leq 3\Rightarrow\begin{cases} x_1^2\leq x_1x_2 \\ x_2^2\leq 9 \end{cases}$

Suy ra $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\leq 9+3x_1x_2$

$\Rightarrow Q\leq\dfrac{18+9(x_1+x_2)+3x_1x_2+9}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}=3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=x_2=3 \\ x_1=0; x_2=3 \end{array}\right.$. Hay là: $\begin{cases} b=-6a \\ c=9a \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=-3a \\ c=0 \end{cases}$.

• Ta tìm Min của Q

Ta có: $Q-2=\dfrac{3(x_1+x_2)+x_1^2+x_2^2}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}\geq 0\Rightarrow Q\geq 2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=0\Leftrightarrow b=c=0$.

Vậy $\max Q=3$ và $\min Q=2$.

Bài 3.23: Từ giả thiết của bài toán suy ra: $a\geq 1, 0<c\leq\frac{1}{4a}$.

Suy ra

$$P \geq \frac{4a^3-1}{a^2-4a^4} \Rightarrow P+1 \geq \frac{4a^3-1}{a^2-4a^4}+1=\frac{4a^4-4a^3-a^2+1}{a^2-4a^4}=\frac{(a-1)(4a^3-a-1)}{a^2(1-4a^2)}$$

Vì $a \geq 1$ nên $4a^3-a-1=a(a^2-1)+3a^2-1>0$ do đó

$\frac{(a-1)(4a^3-a-1)}{a^2(1-4a^2)} \geq 0 \Rightarrow P \geq -1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi: $a=1, c=\frac{1}{4}$.