Chuyên đề nâng cao 1
TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1.1. Trên tia đối tia MA' lấy D' sao cho $MD' = MA'$ mà $\frac{MA'}{BC} = \frac{MB'}{CA}(gt) \Rightarrow \frac{MD'}{BC} = \frac{MB'}{CA}$

Xét $\Delta MD'B'$ và ΔCBA có $D'MB = BCA$ (cùng bù với góc A'MB')

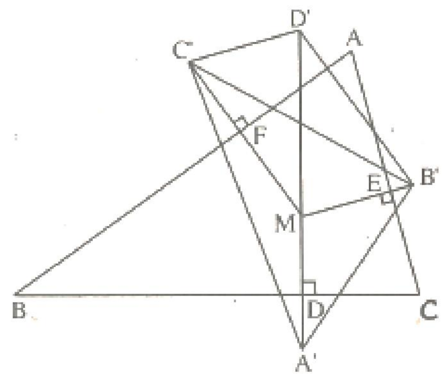
Và

$\frac{MD'}{BC} = \frac{MB'}{CA} \Rightarrow \Delta MD'B' \backsim \Delta CBA(g.g) \Rightarrow \frac{MD'}{AB} = \frac{M}{C}$

ta có : $\frac{B'D'}{AB} = \frac{MC'}{AB}\left(= \frac{MB'}{CA}\right) \Rightarrow B'D' = MC'$

Chứng minh tương tự có $D'C' = MB'$, do đó tứ giác MC'D'B' là hình bình hành. Nên A'M đi qua trung điểm của B'C'

Vậy M là trọng tâm của tam giác A'B'C'



Hình 3.114

1.2. Qua I vẽ đường thẳng vuông góc với IC tại I, đường thẳng này cắt AC, BC lần lượt tại D, E. ta có : $AIB = ADI\left(= 90^0 + \frac{ACD}{2}\right) \Rightarrow \Delta DAI \backsim \Delta IAB(g.g) \Rightarrow \frac{AD}{IA} = \frac{IB}{AB} = \frac{IE}{IA} \quad (1)$

$\Delta EBI \backsim \Delta IBA(g.g) \Rightarrow \frac{BE}{IB} = \frac{IB}{AB} = \frac{IE}{IA} \quad (2)$

Từ(1) và (2) có $AD.BE = ID.IE$

$IC^2 = CD^2 - ID^2 = (AC - AD)(BC - BE)$

$= AC.BC - AC.BE - BC.AD + AD.BE - ID^2$

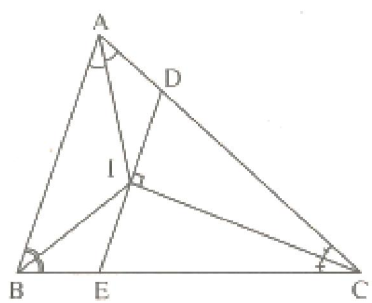
$= AC.BC - AC.BE - BC.AD$

$\Rightarrow IC^2.AB = AB.AC.BC - AC.AB.BE - BC.AB.AD$

$\Rightarrow IC^2.AB = AB.AC.BC - IB^2.AC - IA^2.BC$

$\Rightarrow IC^2.c = a.b.c - IB^2.b - IA^2.a$

$\Rightarrow \frac{IC^2}{ab} = 1 - \frac{IB^2}{c.a} - \frac{IA^2}{b.c} \Rightarrow \frac{IA^2}{b.c} + \frac{IB^2}{c.a} + \frac{IC^2}{a.b} = 1$



Hình 3.115

1.3. Vẽ tia Bx sao cho $CBx = 20^0$, Bx cắt cạnh AC tại D. Vẽ $AE \perp Bx, E \in Bx$

Ta có : $\Delta BDC \backsim \Delta ABC\left(CBD = BAC = 20^0, BCD\, chung\right)$

$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow BD = BC = a$

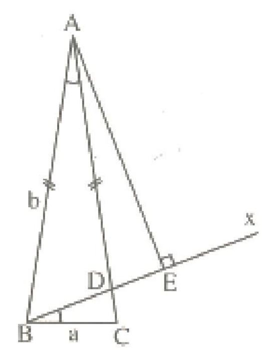
$DC = \frac{BD}{AB}.BC = \frac{a^2}{b}$ và $AD = AC - DC = b - \frac{a^2}{b}$

ΔABE vuông tại E có $ABE = ABC - CBD = 60^0$

Suy ra $BE = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow DE = BE - BD = \frac{b}{2} - a$

ΔABE vuông tại E nên theo định lí Pytago ta có :

$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow AE^2 = AB^2 - BE^2 = \frac{3}{4}b^2$



Hình 3.116

ΔADE vuông tại E nên theo định lí Pytago ta có : $AE^2 + DE^2 = AD^2$

$\Rightarrow \frac{3}{4}b^2 + \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab + a^2 = b^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{b^2} \Rightarrow \frac{a^4}{b^2} + ab = 3a^2 \Rightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$

1.4.

Cách 1

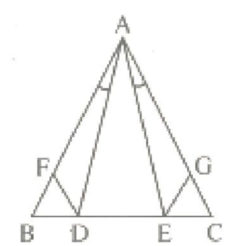
Từ D vẽ $DF \parallel AC$,từ E vã $EG \parallel AB$. Ta chứng minh được

$\frac{DF}{EG} = \frac{AC}{AB}$ (1)

$\Delta ADF \backsim \Delta AEG(g.g) \Rightarrow \frac{DF}{EG} = \frac{AD}{AE}$ (2)

Từ (1) và (2) có :

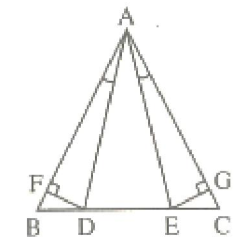
$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta AEB(c.g.c) \Rightarrow ABC = ACB$



Hình 3.117

Cách 2

Từ D và E lần lượt vẽ $DF \perp AB, EG \perp AC$.



Hình 3.118

$BD = CE \Rightarrow S_{ABD} = S_{ACE}$

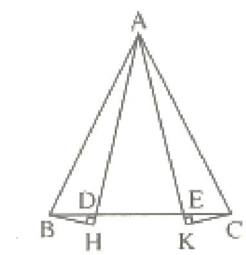
$\Rightarrow AB.DF = AC.EG \Rightarrow \dfrac{DF}{EG} = \dfrac{AC}{AB} \quad (1)$

$\Delta ADF \backsim \Delta AEG(g.g) \Rightarrow \dfrac{DF}{EG} = \dfrac{AD}{AE} \quad (2)$

Từ (1) và (2) có :

$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AE} \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACD \Rightarrow ABE = ACD$

Cách 3. Vẽ tia BH, CK là các đường cao của tam giác ABD, ACE



Hình 3.119

$BD = CE \Rightarrow S_{ABD} = S_{ACE} \Rightarrow \dfrac{BH}{CK} = \dfrac{AE}{AD}$

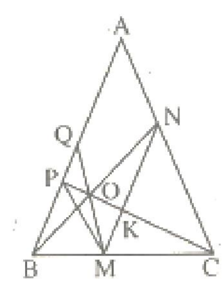
$\Delta ABH \backsim \Delta ACK \Rightarrow \dfrac{BH}{CK} = \dfrac{AB}{AC}$

$\Delta ABE \backsim \Delta ACD\left(BAE = CAD, \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD}\right)$

$\Rightarrow ABE = ACD \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

1.5. Giả sử $MB \le MC$. Gọi G là giao điểm của AB và MO, K là giao điểm của MN và CP.

Vì MNAP là hình bình hành nên $QPM = ANM \quad (1)$



Hình 3.120

Vì tam giác ABC cân tại A nên tam giác PBM cân tại P và tam giác NCM cân tại N.

Do đó $PB = PM = AN$ và $NC = NM = AP$

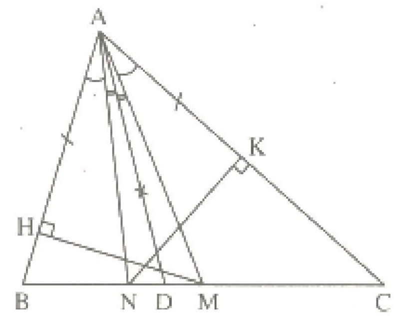
Kết hợp với $MN \parallel AP$ suy ra

$\dfrac{PQ}{PM} = \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{KM}{KN} = \dfrac{PB}{PA} = \dfrac{NA}{NM} \quad (2)$

Từ (1) và (2) có $\Delta QPM \backsim \Delta ANM(c.g.c)$

$=> OMP = AMN$

1.6. Vẽ $MH \perp AH$ tại H, $NK \perp AC$ tại K. Từ giả thiết ta có $BAM = CAN, BAN = CAM$



Hình 3.121

$\Delta HAM \backsim \Delta KAN(g.g) \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{MH}{NK}$

Do đó $\frac{S_{ABM}}{S_{ACN}} = \frac{BM}{CN} = \frac{MH.AB}{NK.AC} = \frac{AM.AB}{AN.AC}$

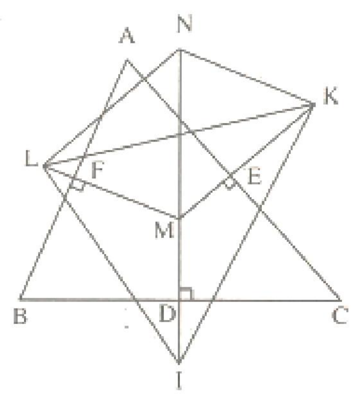
Nên $\frac{BM}{CN} = \frac{AM.AB}{AN.AC}$

Chứng minh tương tự có : $\frac{BN}{CM} = \frac{AN.AB}{AM.AC}$

Do đó $\frac{BM}{CN}.\frac{BN}{CM} = \frac{AM.AB}{AM.AC}.\frac{AN.AB}{AN.AC}$

Vậy $\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$

1.7. Gọi N là điểm đối xứng của điểm I qua M. Ta có MN = MI



Hình 3.122

Xét ΔKNM và ΔABC có $\frac{MN}{BC} = \frac{MK}{AC}$

$KMN = ACB$ (cùng bù với KMD)

Do đó $\Delta KNM \backsim \Delta ABC(c.g.c) \Rightarrow \frac{NK}{AB} = \frac{MK}{AC}$ (1)

Mà $\frac{ML}{AB} = \frac{MK}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) có : $\frac{ML}{AB} = \frac{NK}{AB} => ML = NK$

Tương tự

$\Delta LMN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{LN}{AC} = \frac{ML}{AB}$, mà $\frac{MK}{AC} = \frac{ML}{AB}(gt) => LN = MK$

Tứ giác LNKM có $ML = NK, LN = MK$ nên là hình bình hành, suy ra IM đi qua trung điểm của LK. Chứng minh tương tự có LM đi qua trung điểm của IK.

Vậy M là trọng tâm tam giác IKL

1.8. Cách 1

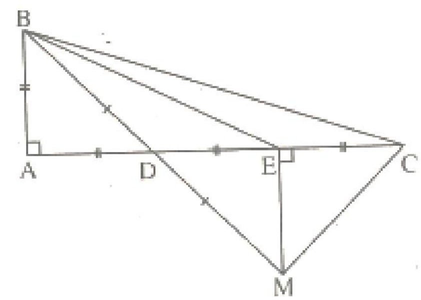
Trên tia đối của tia DA dựng điểm M : AD = DM. Dễ dàng thấy BAME là hình bình hành.

Do đó $AB = ME = DE = EC \Rightarrow \Delta DMC$ vuông cân tại M.

Tam giác EAB vuông có $AE = 2AB$, Tam giác BMC vuông có $MB = 2MC$

$\Rightarrow \Delta EAB \backsim \Delta BMC\left(c.g.c\right) \Rightarrow AEB = MBC$

Do đó $AEB + ACB = MBC + ACB = ADB = 45^0$



Hình 3.123

Cách 2:

Đặt

$AB = AD = DE = EC = a$ thì $BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Lại có $CD.ED = 2a.a = 2a^2$ nên $BD^2 = CD.ED$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{BD}{ED} \Rightarrow \Delta CDB \backsim \Delta BDE\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow DCB = DBE$

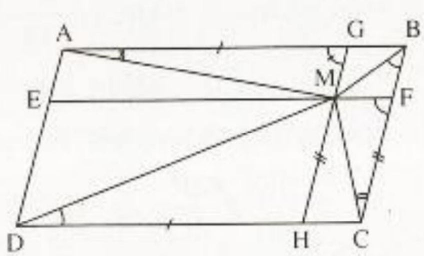
Vậy $DCB + DBE = DBE + DEB = ADB = 45^0$

1.9. Từ M vẽ đường thẳng song song với các cạnh hình bình hành ABCD cắt các cạnh của hình này lần lượt tại E,F,G,H (xem hình vẽ)

Do đó $\Delta AGM \backsim \Delta DFM \Rightarrow \dfrac{AG}{CF} = \dfrac{MG}{MF}$

Mà

$AG = DH; CF = MH; MG = FB$ nên $\dfrac{DH}{MH} = \dfrac{BF}{MF}$ (1)



Hình 3.124

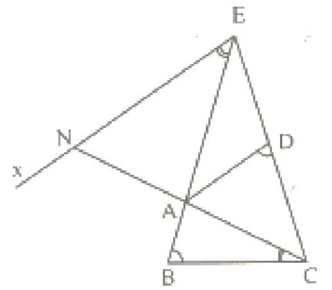
Mặt khác, $DHM = MGB = BFM\left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta DHM \backsim \Delta BFM$

Do đó $MDH = MBF$ hay $MDC = MBC$

1.10. Trên nửa mặt phẳng bờ EA không chứa C vẽ tia Ex sao cho $AEx = ACB$.

Gọi N là giao điểm của Ex và CA



Hình 3.125

Xét ΔABC và ΔANE có $BAC = NAE$ (đối đỉnh)

$ABC = ACB = AEN$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta ANE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AC}{AE}$ và $ABC = ANE$

Từ $\dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AC}{AE}$ suy ra $AB.AE = AC.AN$ (1)

Xét

$\Delta CDA \backsim \Delta CNE$ có $DCA\left(chung\right), ADC = CNE\left(= ABC\right)$

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CNE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AC}{CE} = \dfrac{CD}{CN} \Rightarrow CD.CE = AC.CN$ (2)

Từ (1) và (2) có $CD.CE - AB.AE = AC.CN - AC.AN = AC\left(CN - AN\right) = AC.AC = AC^2$