

Đáp án chuyên đề:

Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn – Đại số 10

Bài 3.45: a) Vô nghiệm b) $(x; y) = (1; -2)$ c) $(x; y) = \left(-\frac{136}{73}; -\frac{1905}{73}\right)$

Bài 3.46: a)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ x - 3y + z = 5 \\ x - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 5y \\ 1 + 5y + 2y - 3z = 2 \\ 1 + 5y - 3y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 5y \\ 7y - 3z = 1 \\ 2y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

b) $(x; y; z) = (1; -1; 1)$ c) $(x; y; z) = (0; -4; 10)$ d) $(x; y; z) = \left(\frac{11}{14}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{7}\right)$

Bài 3.47: a) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 15y = 21 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y = 17 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

b) ĐKXD: $x \neq \pm y$, đặt $\frac{1}{x+y} = u$; $\frac{1}{x-y} = v$

Khi đó, có hệ mới $\begin{cases} u + v = \frac{5}{8} \\ -u + v = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 1 \\ u + v = \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2} \\ u = \frac{1}{8} \end{cases}$

Thay trở lại, ta được: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

c) $(-3; -2)$, $(-2; -3)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$ d) $(-1; -1)$, $(1; 1)$

Bài 3.48: a) Từ hệ phương trình ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m \cdot 1 - 1 \cdot 2 = m - 2$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2m \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 2m - 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = m \cdot 3 - 1 \cdot 2m = 3m - 2m = m$$

• Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Suy ra hệ phương trình có một nghiệm duy nhất: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{2m - 6}{m - 2}$; $y = \frac{D_y}{D} = \frac{m}{m - 2}$

• Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow D_x = -4 \neq 0 \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm

b) Ta có $D = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m^2 & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = (m-1)(2m+1)$

$$D_x = \begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ m^2+2m & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 3m + 1 = (m+1)(2m+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m^2 & m^2+2m \end{vmatrix} = (m+1)(m^2+2m) - m^2(m-1) = 2m(2m+1)$$

- Với $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{m+1}{m-1}; \frac{2m}{m-1} \right)$$

- Với $D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

+ Khi $m = -\frac{1}{2}$ ta có $D = D_x = D_y = 0$ nên hệ phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x - 2y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4y - 1$. Do đó hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (4t - 1; t), t \in R$.

+ Khi $m = 1$ ta có $D = 0, D_x \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm

Kết luận: $m \neq 1$ và $m \neq -\frac{1}{2}$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{m+1}{m-1}; \frac{2m}{m-1} \right)$

$m = -\frac{1}{2}$ hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (4t - 1; t), t \in R$.

$m = 1$ hệ phương trình vô nghiệm

Bài 3.49: Ta có: $D = \begin{vmatrix} m+1 & 8 \\ m & m+3 \end{vmatrix} = (m+1)(m+3) - 8m = m^2 - 4m + 3$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \neq 0$
 $\Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq 3$.

Bài 3.50: Ta có: $D = \begin{vmatrix} -8-m & m+6 \\ m & m+6 \end{vmatrix} = -m^2 - 6m - 8$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ -m & m+3 \end{vmatrix} = -m^2 - m + 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -4 & m+3 \\ m+1 & m+6 \end{vmatrix} = -m^2 - 11m - 18$$

$$\text{Hệ có vô số nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 6m - 8 = 0 \\ -m^2 - m + 2 = 0 \\ -m^2 - 11m - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy hệ có vô số nghiệm khi $m = -2$.

Bài 3.51: Ta có $P(x; y) \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} mx + 2y - 2m = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} (*)$

$$D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 2$$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ thì hệ phương trình (*) có nghiệm do đó $\min P(x; y) = 0$.

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = 2$ ta có

$$P(x; y) = (2x + 2y - 4)^2 + (x + y - 3)^2 = 5(x + y)^2 - 22(x + y) + 25$$

$$\Rightarrow P(x; y) = 5\left(x + y - \frac{11}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$$

$$\text{Suy ra } \min P(x; y) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x + y - \frac{11}{5} = 0$$

Vậy $m \neq 2$ thì $\min P(x; y) = 0$, $m = 2$ thì $\min P(x; y) = \frac{4}{5}$.

Bài 3.52: Ta có: $D = -2(m - 2)(m + 2)$; $D_x = (m - 2)(1 - 3m)$;

$$D_y = (m - 2)(m + 3)$$

$$\text{a) Ta có hệ vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x^2 + D_y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \neq -2$.

$$\text{b) Hệ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow m \neq \pm 2 \text{ và } \begin{cases} x = \frac{3m - 1}{2(m + 2)} \\ y = -\frac{m + 3}{2(m + 2)} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow x \geq 2y \Leftrightarrow \frac{3m - 1}{2(m + 2)} \geq -\frac{2(m + 3)}{2(m + 2)} \Leftrightarrow \frac{5m + 5}{m + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 2 \\ m < -2 \end{cases}.$$

c) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq \pm 2$

$$P = x^2 + 3y^2 = \frac{3m^2 + 3m + 7}{m^2 + 4m + 4} \Leftrightarrow (3 - P)m^2 + (3 - 4P)m + 7 - 4P = 0 \quad (1)$$

$$* P = 3 \text{ thì (1) có nghiệm } m = -\frac{5}{9}.$$

$$* P \neq 3 \Rightarrow (1) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta = 52P - 75 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq \frac{75}{52}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = \frac{8}{9}$.

Vậy P nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = \frac{8}{9}$ và $\min P = \frac{75}{52}$.

$$\text{Bài 3.53: Đặt: } \begin{cases} \sqrt{x + 1} = u \\ \sqrt{y} = v \end{cases} \quad (u, v > 0)$$

Khi đó hệ có dạng:
$$\begin{cases} mu + v = m + 1 \\ ux + mv = 2 \end{cases}$$

Ta có: $D = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} = m^2 - 1$

$D_u = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{pmatrix} = m^2 + m - 2$; $D_v = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = m - 1$

• Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Hệ có nghiệm duy nhất $u = \frac{m+2}{m+1}$ và $v = \frac{1}{m+1}$

Vì điều kiện $u, v > 0$ nên ta có:
$$\begin{cases} \frac{m+2}{m+1} \geq 0 \\ \frac{1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

Khi đó ta được:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = \frac{m+2}{m+1} \\ \sqrt{y} = \frac{1}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m+3}{(m+1)^2} \\ y = \frac{1}{(m+1)^2} \end{cases}$$

• Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

Với $m = 1 \Rightarrow D_u = D_v = 0$, hệ có vô số nghiệm thỏa $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2$

Với $m = -1 \Rightarrow D_u = 2 \neq 0$, hệ vô nghiệm.