# Đáp án chuyên đề:
# Hệ thức lượng trong tam giác - Hình học 10

**Bài 2.56:** Đặt $BC = x \quad x > 0$ . $MN = 3 \Rightarrow AC = 6$.

Theo định lí côsin ta có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2.CA.CB.\cos C$

Hay $81 = 36 + x^2 - 2.6.x.\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3 \;\; 1 + \sqrt{6}$

**Bài 2.57:** Đặt $AC = x \quad x > 0$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABD$ ta có $BD^2 = 1 + \;\; 1 + x \;\; ^2 - 2 \;\; 1 + x \;\; .\frac{1}{x}$

Áp dụng định lí sin trong tam giác $BCD$ ta có $BD = \frac{1}{\sin 30^0} \sin BCD = \frac{2}{x}$

Suy ra ta được phương trình

$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \;\; x + 2 \quad x^3 - 2 \;\; = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$

Vậy $AC = \sqrt[3]{2}$

**Bài 2.58:** $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1 - x^2}{2 \;\; x^2 - 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^0$

**Bài 2.59:** a) Áp dụng công thức Hê - rông ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6\sqrt{3}$

b) Áp dụng công thức tính diện tích $S = \frac{abc}{4R}$ và $S = pr$ suy ra $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{12\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

**Bài 2.60:** HD: a) Đặt $\frac{a}{\sqrt{3}} = t > 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}t,\, b = \sqrt{2}t,\, c = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}t$

Áp dụng định lí côsin ta có

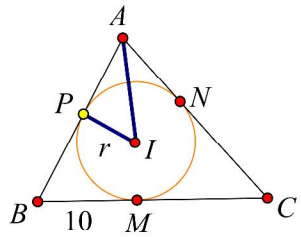
$$\cos \mathrm{A} = \frac{\mathrm{b}^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2t^2 + \;\; 2 - \sqrt{3} \;\; t^2 - 3t^2}{2 \;\; \sqrt{3} - 1 \;\; t^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^0$$

$$\cos \mathrm{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3t^2 + \;\; 2 - \sqrt{3} \;\; t^2 - 2t^2}{\sqrt{2} \;\; 3 - \sqrt{3} \;\; t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^0,\, C = 15^0$$

b) Áp dụng định lí sin, ta có: $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin 120^0} = 2$.

**Bài 2.61:** (hình 2.22)

a) $2R = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$



Hình 2.22

b) Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA và AB với đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Ta có

$AP = AN - r.\cot 30^0 = 5,\ BP + NC = BM + MC = a = 10$

$\Rightarrow\ b - AN\ +\ c - AP\ = 10 \Rightarrow b + c = 20$ (1).

Theo định lí côsin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^0 \Rightarrow bc = \dfrac{b + c\ ^2 - a^2}{3} = 100$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra b, c là nghiệm của phương trình $x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 10$

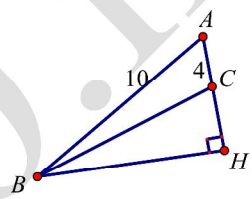
Vậy $b = c = 10 \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

**Bài 2.62:** a) Theo định lí côsin ta có

$BC^2 = 10^2 + 4^2 - 2.10.4\cos 60^0 = 76$

$\Rightarrow BC \approx 8,72$

Suy ra chu vi tam giác là $2p \approx 10 + 4 + 8,72 = 22,72$



Hình 2.23a

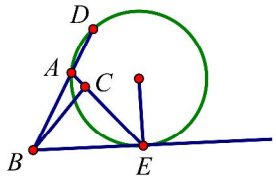
b) (Hình 51a.)

Kẻ đường cao BH ta có

$AH = AB\cos 60^0 = 5 \Rightarrow HC = 5 - 4 = 1$.

$BH = AB.\sin 60^0 = 5\sqrt{3}$

Vậy $\tan C = -\tan BCH = -\dfrac{HB}{HC} = -5\sqrt{3}$



Hình 2.23b.

c) (Hình 51b.)

Để BE là tiếp tuyến đường tròn (C) ta phải có

$BE^2 = BA.BD = 10\ \ 10 + 6\ \ = 160.$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABE$ ta có

$BE^2 = x^2 + 100 - 10x \Rightarrow x^2 - 10x - 60 = 0 \Rightarrow x = 5 + \sqrt{85}$.

**Bài 2.63:** (hình 2.24)

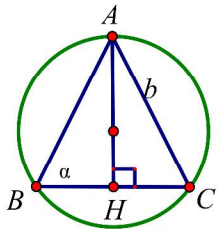
a) Giả sử tam giác cân tại đỉnh A. Đặt $B = C = \alpha \Rightarrow \alpha < 90^0$

Ta có $\sin\alpha = \dfrac{b}{2R} \Rightarrow \cos B = \cos C = \cos\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4R^2}}$

$\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{b^2 - 2R^2}{2R^2}$

b) $S = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}.2b\cos\alpha.b\sin\alpha = \dfrac{b^3\sqrt{4R^2 - b^2}}{4R^2}$

Chu vi tam giác là $2p = 2b + 2b\dfrac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}$



Hình 2.24

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{b^2\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R\ \ 2R + \sqrt{4R^2 - b^2}}$

c) Ta phải tìm b để $y = b^3\sqrt{4R^2 - b^2}$ đạt GTLN

Áp dụng BĐT Cauchy cho bốn số ta có

$$y = 3\sqrt{3}\sqrt{\frac{b^2}{3}.\frac{b^2}{3}.\frac{b^2}{3}.\ 4R^2 - b^2} \le 3\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\ 4R^2-b^2}{4}\right)^4} = 3\sqrt{3}R^4$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b^2}{3} = 4R^2 - b^2 \Leftrightarrow b = R\sqrt{3}$.

**Bài 2.64:** HD: a) Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{3^2+4^2-2^2}{2.3.4} = \frac{7}{8} \Rightarrow A \approx 28^0 57'$$

$$\cos B = \frac{2^2+4^2-3^2}{2.2.4} = \frac{11}{16} \Rightarrow B \approx 46^0 34'$$

$C = 180^0 - A - B \approx 104^0 29'$

b) Theo định lí sin ta có

$\sin C = \frac{c\sin A}{a} = \frac{8,2.\sin 110^0}{12} \Rightarrow C \approx 39^0 57'$ hoặc $C \approx 180^0 - 39^0 57' = 140^0 3'$

Vì góc A tù nên góc C nhọn do đó $C \approx 39^0 57'$

Suy ra $B = 180^0 - A - C \approx 180^0 - 110^0 - 39^0 57' = 33^0 3'$

Mặt khác $b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{12.\sin 33^0 3'}{\sin 110^0} \approx 6,96$

**Bài 2.65:** HD: a) $A = 180^0 - \ 33^0 24' + 66^0 59' \ = 79^0 37'$

$b = \frac{a.\sin 33^0 24'}{\sin 79^0 37'} \approx 61;\quad c = \frac{a.\sin 66^0 59'}{\sin 79^0 37'} \approx 102$

b) $\sin B = \frac{13.\sin 67^0 23'}{20} \approx 0,6$

Vì $b < a \Rightarrow B < A \Rightarrow B \approx 36^0 52';\quad C \approx 75^0 45';\quad c = \frac{20.\sin 75^0 45'}{\sin 67^0 23'} \approx 21$

**Bài 2.66:** a) Ta có $B = 180^0 - A - C = 180^0 - 30^0 - 75^0 \ = 75^0$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{b\sin A}{\sin B} = \frac{4,5.\sin 30^0}{\sin 75^0} \Rightarrow a \approx 2,33$$

$$c = \frac{b\sin C}{\sin B} = \frac{4,5.\sin 75^0}{\sin 75^0} \Rightarrow c \approx 4,5$$

b) Theo định lí côsin ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 14^2 + 10^2 - 2.14.10.\cos 145^0$

Suy ra $a \approx 22,92$

Theo định lí sin ta có

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{14\sin 145^0}{22,92} \approx 0,35 \Rightarrow B \approx 20^0 29'$$

Suy ra $C = 180^0 - A - B \approx 180^0 - 145^0 - 20^0 29' = 14^0 31'$

c) Áp dụng định lí côsin ta có:

$\cos A = \sqrt{\frac{11}{15}} \Rightarrow A \approx 31^0 5'$; $\cos B = \sqrt{\frac{17}{35}} \Rightarrow B \approx 45^0 49'$

$\cos C = \sqrt{\frac{5}{21}} \Rightarrow C \approx 50^0 47'$

**Bài 2.67:** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 13^2 + 4^2 - 2.13.4.\left(-\frac{5}{13}\right) = 225 \Rightarrow c = 15$

$\sin C = \frac{12}{13} \Rightarrow R = \frac{c}{2\sin C} = \frac{15}{2.\frac{12}{13}} = \frac{65}{8}$

$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}.13.4.\frac{12}{13} = 24$; $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+4+15}{2} = 16$

$r = \frac{S}{p} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

**Bài 2.68:** a) Áp dụng định lí côsin ta có:

$VP = b.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2}{2a} = a = VT$ b)

$\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R}.\cos C + \frac{c}{2R}.\cos B$

$\Leftrightarrow a = b.\cos C + c.\cos B$ (câu a)

c) $h_a = 2R\sin B\sin C \Leftrightarrow \frac{2S}{a} = 2R\frac{b}{2R}\sin C \Leftrightarrow S = \frac{1}{2}ab\sin C$ (đúng)

d) Áp dụng công thức đường trung tuyến.

e) $\sqrt{AB^2.AC^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}^2} = AB.AC\sqrt{1-\cos^2 A} = AB.AC.\sin A$

Từ đó suy ra đpcm.

**Bài 2.69:** a) $b + c = 2a \Leftrightarrow \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} = 2.\frac{2S}{h_a} \Leftrightarrow \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{h_a}$

b) $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2 \Leftrightarrow \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} = 5.\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow$ Góc A vuông

**Bài 2.70:** a) Dễ thấy $a > b$, $a > c \Rightarrow$ góc A là lớn nhất

Và $a^4 = b^4 + c^4 < a^2.b^2 + a^2.c^2 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$

Mặt khác theo định lí côsin ta có $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow \cos A > 0$ do đó $A < 90^0$. Vậy tam giác $ABC$ nhọn.

b) $2\sin^2 A = \tan B\tan C \Leftrightarrow 2\sin^2 A.\cos B.\cos C = \sin B\sin C$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{2R}\right)^2.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}$

$\Leftrightarrow a^4 = b^4 + c^4$

**Bài 2.71:** Áp dụng $\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

**Bài 2.72:** a) Ta có $S = \frac{abc}{4R} = \frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

b) $S = pr = \frac{a+b+c}{2}.r = \frac{2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C}{2}r$

**Bài 2.73:** Gọi I là giao điểm hai đường chéo. Khi đó

$S = S_{ABI} + S_{BCI} + S_{CDI} + S_{DAI}$

$= \frac{1}{2}AI.BI.\sin AIB + \frac{1}{2}BI.CI.\sin BIC + \frac{1}{2}CI.DI.\sin CID + \frac{1}{2}DI.AI.\sin DIA$

Ta có các góc $AIB$, $BIC$, $CID$ và $DIA$ đôi một bù nhau suy ra

$\sin AIB = \sin BIC = \sin CID = \sin DIA = \sin\alpha$

Do đó $S = \frac{1}{2}BI.AC.\sin\alpha + \frac{1}{2}ID.AC.\sin\alpha = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$

**Bài 2.74:** Với $AB = AC$ ta có đpcm

Với $AB \neq AC$. Ta có: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60^o = AB^2 + AD^2 - AB.AD$

$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos 60^o = AC^2 + AD^2 - AC.AD$

$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD^2}{DC^2} = \frac{AB^2 + AD^2 - AB.AD}{AC^2 + AD^2 - AC.AD}$

$\Leftrightarrow AB^2(AC^2 + AD^2 - AC.AD) = AC^2(AB^2 + AD^2 - AB.AD)$

$\Leftrightarrow (AB^2 - AC^2)AD^2 = AB.AC.AD(AB - AC)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB = AC \\ AD = \frac{AB.AC}{AB + AC} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

**Bài 2.75:** a) Áp dụng định lí côsin, ta có:

$2abc\ \cos A + \cos B = 2abc.\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$

$= a\ b^2 + c^2 - a^2 + b\ a^2 + c^2 - b^2 = a + b\left[c^2 - a + b^2\right]$

$= a + b\ b + c - a\ c + a - b$

Suy ra $\frac{\cos A + \cos B}{a + b} = \frac{b + c - a\ c + a - b}{2abc}$

b) Áp dụng định lí sin và côsin, ta có:

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A} = \frac{\frac{a}{2R}.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{\frac{b}{2R}.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$$

Suy ra $c^2 + b^2 - a^2\ \tan A = c^2 + a^2 - b^2\ \tan B$

**Bài 2.76:** a) Ta có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}a.h_a$

Mặt khác $(a+b-c)(a+c-b) = a^2 - (b-c)^2 \le a^2$

$\Rightarrow \sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{1}{2}a \Rightarrow h_a \le \sqrt{p(p-a)}$

b) Vì $S = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ nên bất đẳng thức tương đương với

$\frac{a^2b^2}{R^2} + \frac{b^2c^2}{R^2} + \frac{c^2a^2}{R^2} \le (a+b+c)^2 \Leftrightarrow 4\ h_a^{\ 2} + h_b^{\ 2} + h_c^{\ 2} \le (a+b+c)^2$

Sử dụng câu a) suy ra

$4\ h_a^{\ 2} + h_b^{\ 2} + h_c^{\ 2} \le (b+c)^2 - a^2 + (c+a)^2 - b^2 + (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)^2$ Vậy

$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le R^2(a+b+c)^2$

**Bài 2.77:** Ta có $S = pr \Rightarrow r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

$\Rightarrow r^2 + (p-a)^2 = (p-a)[\frac{(p-b)(p-c)}{p} + p - a] = \frac{(p-a)bc}{p}$

Tương tự $r^2 + (p-b)^2 = \frac{(p-b)ac}{p}, r^2 + (p-c)^2 = \frac{(p-c)ab}{p}$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với

$\sqrt{(p-a)bc} + \sqrt{(p-b)ac} + \sqrt{(p-c)ab} \le \sqrt{p(ab+bc+ca)}$

BĐT này đúng vì theo CauChy-Schwarz ta có

$\sqrt{(p-a)bc} + \sqrt{(p-b)ac} + \sqrt{(p-c)ab}$

$\le \sqrt{(p-a+p-b+p-c)(ab+bc+ac)} = \sqrt{p(ab+bc+ca)}$

**Bài 2.78:** Ta có:

$S = pr \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$(p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

Từ đó: $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$

Tương tự: $r = (p-b)\tan\frac{B}{2}$ và $r = (p-c)\tan\frac{C}{2}$.

Do đó : $r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$.

**Bài 2.79:** Áp dụng $\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$ suy ra $2\cot A = \cot B + \cot C \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có

$\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow c^2.\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} = b^2.\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} \Leftrightarrow b^4 - c^4 = 2a^2\ \ b^2 - c^2$ Suy ra

$b^2 + c^2 = 2a^2$ đpcm.

**Bài 2.80:** Áp dụng định lí côsin trong tam giác $MAB$, ta có
$BM^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\alpha$

Mặt khác $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.AM.\sin\alpha \Rightarrow BM^2 = AB^2 + AD^2 - 4S_{MAB}.\cot\alpha$

Tương tự ta có $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 4S_{MBC}.\cot\alpha$, $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 4S_{MCA}.\cot\alpha$

Cộng vế với vế suy ra $\cot\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \cot A + \cot B + \cot C$

**Bài 2.81:** Áp dụng $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ và công thức đường trung tuyến với chú ý
$S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB}$

**Bài 2.82:** C1: Gọi D là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp $I;r$ tam giác với BC. Suy ra
$a = BD + DC = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$, tương tự ta có $b = r\left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right)$

Do đó $a - b \ \cot\frac{C}{2} = r\left(\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}\right)$

Xây dựng các biểu thức tương tự và cộng lại suy ra đpcm.

C2: $(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} +$

$+(b-c)\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} + (c-a)\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(p-c) + (b-c)(p-a) + (c-a)(p-b) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 - c(a-b) + b^2 - c^2 - a(b-c) + c^2 - a^2 - b(c-a) = 0$

Điều này luôn đúng. Vậy ta có đpcm.

**Bài 2.83:** Ta có $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 5BD^2$ .

Sử dụng định lý côsin và bất đẳng thức Cauchy ta chứng minh được

$\cos BAD \geq \frac{4}{5} \Rightarrow \cot BAD \geq \frac{4}{3}$.

**Bài 2.84:** C1: Áp dụng công thức diện tích Hêrông và bất đẳng thức cauchy

C2: Áp dụng định lí côsin và công thức tính diện tích ta có

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.S \Leftrightarrow 2\ \ b^2 + c^2 + bc\cos A\ \ \geq 4\sqrt{3}.\frac{1}{2}bc\sin A$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq bc\ \ \sqrt{3}\sin A + \cos A$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $\sqrt{3}\sin A + \cos A\ ^2 \leq 4\ \ \sin^2 A + \cos^2 A\ \ = 4$ và $b^2 + c^2 \geq 2bc$

**Bài 2.85:** Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A$ ta có
$h_a = c.\sin A \Leftrightarrow bh_a = ah_a \Leftrightarrow a = b$ suy ra tam giác $ABC$ cân tại C

**Bài 2.86:** Sử dụng công thức đường trung tuyến và định lí sin.

$4m_a^2 = b\ \ b + 4c.\cos A\ \ \Leftrightarrow 4\frac{2\ \ b^2 + c^2\ \ - a^2}{4} = b\left(b + 4c.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \Leftrightarrow a = b$ **Bà**

**i 2.87:** Ta có $r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{p-a \quad p-b \quad p-c}{p}$

Theo Cauchy $\quad p-a \quad p-b \quad p-c \ \le \left(\frac{3p-a-b-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$

Suy ra $36r^2 \le \frac{4p^3}{3p} = \frac{a+b+c}{3}^2 \le a^2+b^2+c^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác $ABC$ đều.

**Bài 2.88:** $b(b^2-a^2) = c(c^2-a^2) \Leftrightarrow b^3-c^3 = a^2 \ \ b-c \ \ \Leftrightarrow b^2+bc+c^2 = a^2$

Theo định lí côsin thì $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$

Do đó $b^2+bc+c^2 = b^2+c^2-2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^0$

**Bài 2.89:** Ta có $\frac{a^3+c^3-b^3}{a+c-b} = b^2 \Leftrightarrow \ b+c \ \ b^2-bc+c^2 \ = a^2 \ \ b+c$

$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^0$

$a = 2b\cos C \Leftrightarrow a = 2b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow b = c$

Vậy tam giác $ABC$ đều.

**Bài 2.90:** Ta có $S = \frac{1}{4} \ a+b-c \ \ a-b+c \ = \frac{1}{4}\left[a^2 - \ b-c \ ^2\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\ b^2+c^2-2\cos A \ - \ b-c \ ^2\right] = \frac{1}{4} \ 2bc \ \ 1-\cos A \ = \frac{1}{2}bc \ \ 1-\cos A$

Mặt khác ta lại có $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ nên

$1-\cos A = \sin A \Leftrightarrow 1-2\cos A+\cos^2 A = \sin^2 A$

$\Leftrightarrow \cos A \ \ \cos A-1 \ = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^0$

Vậy $\Delta ABC$ vuông tại $A$

**Bài 2.91:** Ta có: $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{2a+c}{2a-c}$

$\Leftrightarrow \frac{(1+2\cos B+\cos^2 B)+\sin^2 B}{\sin^2 B} = \frac{2a+c+2a-c}{2a-c}$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos^2 B} = \frac{2a}{2a-c} \Leftrightarrow 2a-c = 2a-2a.\cos B$

$\Leftrightarrow 2a\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = c \Leftrightarrow a^2-b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác cân tại C.

**Bài 2.92:** Ta có:

$\cos A+\cos B = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{2(a+b)(p-a)(p-b)}{abc}$

Vậy $\sin C = \cos A+\cos B \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = \frac{2(a+b)(p-a)(p-b)}{abc}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2cS}{abc} = \dfrac{2(a+b)(p-a)(p-b)}{abc} \Leftrightarrow c^2[(a+b)^2 - c^2] = (a+b)^2[c^2 - (a-b)^2]$

$\Leftrightarrow c^4 = (a^2 - b^2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 \\ b^2 = c^2 + a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A hoặc B.

**Bài 2.93:** Gọi G là trọng tâm, khi đó tam giác $GBC$ vuông tại G. Theo định lí pitago và công thức đường trung tuyến suy ra $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Sử dụng $R.r = \dfrac{bc}{2\ \ 1+\sqrt{10}}$, trong đó $R = \dfrac{abc}{4S}, r = \dfrac{S}{p}$ suy ra $b + c = a\sqrt{10}$

Từ 2 giả thiết trên suy ra $b = c = a\sqrt{5}$

**Bài 2.94:** HD: Ta có: $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{\sqrt{ab}}{4c} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{ca}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{4c}$

$\Leftrightarrow (p-c)^2(p-a)(p-b) = \dfrac{a^2b^2}{16}$

$\Leftrightarrow [(a+b-c)(b+c-a)][(a+b-c)(c+a-b)] = a^2b^2$

$\Leftrightarrow [b^2 - (c-a)^2][a^2 - (b-c)^2] = a^2b^2 \qquad (1)$

Nhận thấy: $0 < b^2 - (c-a)^2 < b^2$ và $0 < a^2 - (b-c)^2 < a^2$

Nên $[b^2 - (c-a)^2][a^2 - (b-c)^2] \le a^2b^2$

Vậy $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} c - a = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

**Bài 2.95:** Ta có $p\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} = p - c \Leftrightarrow p\sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = p - c$

$\Leftrightarrow p - a = p - c \Leftrightarrow a = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân