Đáp án chuyên đề: Hàm số bậc nhất – Đại số 10

Bài 2.16: Gọi hàm số cần tìm là $y = ax + b, a \neq 0$

a) Vì $A \in d$ và $B \in d$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 3 = -2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

b) Ta có $\Delta : y = x + 1$. Vì d $//\Delta$ nên $\begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \end{cases}$

Mặt khác $C \in d \Rightarrow -2 = 2a + b \Rightarrow b = -4$

Vậy hàm số cần tìm là $y = x - 4$

c) Đường thẳng d cắt trục Ox tại $P\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ và cắt Oy tại $Q(0; b)$ với $a < 0, b > 0$

Ta có $OP = OQ \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a} = b \Leftrightarrow b(a + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 (l) \\ a = -1 \end{array}\right.$

Ta có $M \in d \Rightarrow 2 = a + b \Rightarrow b = 3$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -x + 3$.

d) Đường thẳng d đi qua $N(1; -1)$ nên $-1 = a + b$

Và $d \perp d' \Rightarrow a = 1$ suy ra $b = -2$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = x - 2$.

Bài 2.17: Tọa độ giao điểm(nếu có) của hai đường thẳng d, d' là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ suy ra d, d' cắt nhau tại $M(2; 4)$

Vì ba đường thẳng d, d', d'' đồng quy nên $M \in d''$ ta có

$$4 = 2m^2 + 5m + 3 \Rightarrow 2m^2 + 5m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

Dễ thấy với $m = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$ ba đường thẳng đó phân biệt và đồng quy

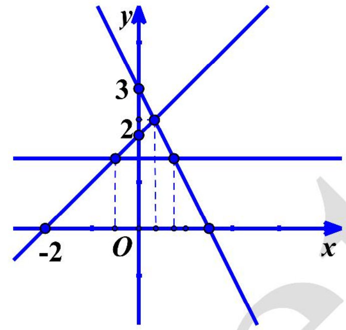
Vậy $m = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$ là giá trị cần tìm..

Bài 2.18: a) Đồ thị hàm số $y = -2x + 3$ đi qua

$A\ \ 0;3\ \ , B\left(\frac{3}{2};0\right)$

Đồ thị hàm số $y = x + 2$ đi qua $A'\ \ 0;2\ \ , B'\ \ -2;0$

Đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2}$ đi qua $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ và song song với trục hoành



b) Giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -2x + 3,\ y = x + 2$ là $M_1\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$

Giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -2x + 3,\ y = \frac{3}{2}$ là $M_2\left(\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$

Giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x + 2,\ y = \frac{3}{2}$ là $M_2\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Bài 2.19:

a) Bảng biến thiên của hàm số trên $[-3;3]$

x	-3	-1	0	$\frac{3}{2}$	3
y	2 ↘	0 ↗	2 ↘	-3 ↗	0

b) Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có

$\max\limits_{[-2;2]} = 2$ khi và chỉ khi $x = 0$

$\min\limits_{[-2;2]} = -2$ khi và chỉ khi $x = 2$

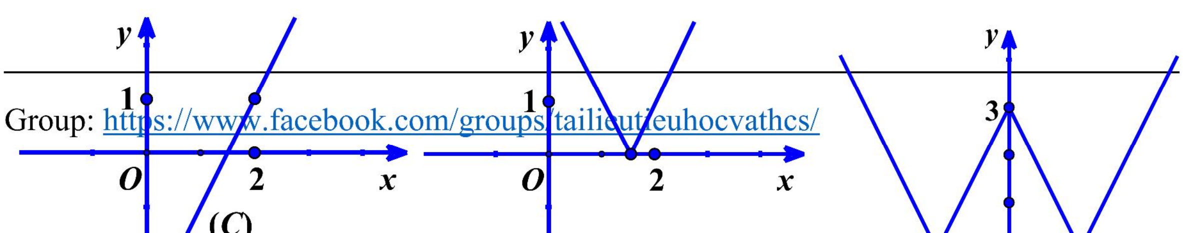
Bài 2.20: Đồ thị hàm số $y = 2x - 3$ đi qua $A\ \ 0;-3\ \ , B\ \ 2;1$ ta gọi là C

- Khi đó đồ thị hàm số C_1 : $y = 2|x| - 3$ là phần được xác định như sau

Ta giữ nguyên đồ thị C ở bên phải trục tung; lấy đối xứng đồ thị C ở phần bên phải trục tung qua trục tung.

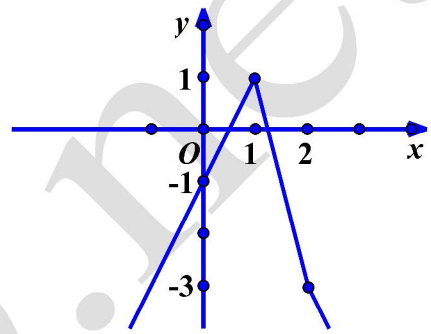
- C_2 : $y = |2x - 3|$ là phần đồ thị C nằm phái trên trục hoành và đồ thị lấy đối xứng qua trục hoành của phần nằm trên trục hoành của C .

- C_3 : $y = |2|x| - 3|$ là phần đồ thị C_1 nằm phái trên trục hoành và đồ thị lấy đối xứng qua trục hoành của phần nằm trên trục hoành của C_1 .



Bài 2.21: Ta có $y = \left|x-2\right| - 3\left|x-1\right|$

$$= \begin{cases} -2x+1 & Khi\ x \ge 2 \\ -4x+5 & Khi\ 1 \le x < 2 \\ 2x-1 & Khi\ \ x < 1 \end{cases}$$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↘	$-\infty$

$\max\limits_{[0;2]} y = 1$ khi và chỉ khi $x = 1$

$\min\limits_{[0;2]} y = -3$ khi và chỉ khi $x = 2$.

Bài 2.22: a) Ta có $y = \dfrac{\left|x+2\right|}{x+2} - \left|x-2\right| = \begin{cases} -x+3 & Khi\ x \ge 2 \\ x-1 & Khi\ -2 < x < 2 \\ x-3 & Khi\ x < -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

b) Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \left|x-2\right|$ ta có số giao điểm của nó với đường thẳng $y = m$ như sau:

Với $m > 1$ thì có 1 giao điểm

Với $m = 1$ thì có hai giao điểm

Với $m < 1$ thì có ba giao điểm

Bài 2.23: Từ giả thiết ta có $x, y, z \in \left[0;1\right] \Rightarrow xy + yz + zx - 2xyz = xy + yz(1-x) + zx(1-y) \ge 0$.

Củng từ giả thiết ta suy ra $yz \le \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}$. Mặt khác ta lại có

$xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27} \Leftrightarrow f(yz) = (1-2x)yz + x(1-x) - \frac{7}{27} \le 0$ (2).

Khi đó ta thấy rằng

Nếu $x = \frac{1}{2}$ khi đó BĐT (2) thành $-\frac{1}{108} \le 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $x \ne \frac{1}{2}$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất. Do đó để chứng minh $f(yz) \le 0$ ta chỉ cần chứng minh

$\begin{cases} f(0) \le 0 \\ f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right] \le 0 \end{cases}$. Dễ thấy $f(0) = x(1-x) - \frac{7}{27} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{108} < 0$ và

$f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right] = (1-2x).\frac{(1-x)^2}{4} + x(1-x) - \frac{7}{27} = -\frac{1}{108}(6x+1)(3x-1)^2 \le 0$. Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \le 0$. Ta đã giải xong bài toán.

Bài 2.24: Từ giả thiết ta có $x, y, z \in [0;3]$ và $yz \le \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(3-x)^2}{4}$. Mặt khác ta thấy

$x^2 + y^2 + z^2 + xyz \ge 4 \Leftrightarrow x^2 + (y+z)^2 - 2yz + xyz - 4 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 + (3-x)^2 - 2yz + xyz - 4 \ge 0$
$\Leftrightarrow f(yz) = (x-2)yz + 2x^2 - 6x + 5 \ge 0 \quad (3).$

Nếu $x = 2$ thì BĐT (3) sẻ thành $1 \ge 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $x \ne 2$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất. Do đó để chứng minh $f(yz) \ge 0$ ta chỉ cần chứng minh

$\begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right] \ge 0 \end{cases}$. Dễ thấy $f(0) = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ và

$f\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right] = (x-2).\frac{(3-x)^2}{4} + 2x^2 - 6x + 5 = \frac{1}{4}(x+2)(x-1)^2 \ge 0$. Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \ge 0$.

Bài 2.25: Từ giả thiết ta có $x, y, z \in \left[0;1\right]$ và $yz \le \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}$. Mặt khác ta thấy

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3 + (y+z)^3 - 3yz(y+z) + 6xyz - \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + (1-x)^3 - 3yz(1-x) + +6xyz - \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow f(yz) = (3x-1)yz + x^2 - x + \frac{1}{4} \ge 0 \quad (4).$$

Nếu $x = \frac{1}{3}$ thì BĐT (4) sẻ thành $\frac{1}{36} \ge 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $x \ne \frac{1}{3}$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất. Theo TC2 thì để chứng minh $f(yz) \ge 0$ ta chỉ cần chứng minh cho

$\begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f\left[\frac{1-x^{\ 2}}{4}\right] \ge 0 \end{cases}$. Dễ thấy $f(0) = x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ và

$f\left[\frac{1-x^{\ 2}}{4}\right] = (3x-1).\frac{1-x^{\ 2}}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}x\left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) \ge 0$ (đúng vì $0 \le x \le 1$ và

$x^2 - x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} > 0$). Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \ge 0$.

Bài 2.26: Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \le a^2b + b^2c + c^2a + 1 \Leftrightarrow (b-1)a^2 + b^2c + c^2a + 1 - b^2 - c^2 \ge 0$.

Vì $0 \le a \le 1 \Rightarrow a \ge a^2 \Rightarrow$

$(b-1)a^2 + b^2c + c^2a + 1 - b^2 - c^2 \ge (b-1)a^2 + b^2c + c^2a^2 + 1 - b^2 - c^2 =$

$= \ c^2 + b - 1 \ \ a^2 + b^2c + 1 - b^2 - c^2 = f(a^2)$. Ta chỉ cần chứng minh $f(a^2) \ge 0$ (5) là được.

Nếu $c^2 + b - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 - b$ khi đó BĐT sẻ trở thành $b^2c + (b - b^2) \ge 0$ (đúng vì $0 \le b, c \le 1$).

Nếu $c^2 + b - 1 \ne 0$ thì ta có $f(a^2)$ là hàm số bậc nhất. Do đó để chứng minh

$f(a^2) \ge 0$ ta chỉ cần chứng minh cho $\begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases}$. Dễ thấy $f(0) = b^2c + 1 - b^2 - c^2$

$= \ 1 - c \ \ (1 + c - b^2) = (1-c)\left[c + \ 1 - b^2 \ \right] \ge 0$ (đúng vì $0 \le b, c \le 1$) và $f(1) = b^2c + \ b - b^2 \ \ge 0$

(đúng vì $0 \le b, c \le 1$). Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(a^2) \ge 0$. Ta đã giải xong bài toán.

Bài 2.27: Giả sử $x = \min\ \ x, y, z$ thì từ giả thiết của bài toán ta suy ra $0 \le x \le \frac{1}{3}$. Mặt khác ta lại có

$x^2y + y^2z + z^2x \le \frac{4}{27} \Leftrightarrow yx^2 + y^2z + z^2x - \frac{4}{27} \le 0$. Vì $0 \le x \le \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 \le \frac{1}{3}x$

$\Rightarrow yx^2 + y^2z + z^2x - \frac{4}{27} \le \frac{1}{3}yx + y^2z + z^2x - \frac{4}{27} = \left(\frac{1}{3}y + z^2\right)x + y^2z - \frac{4}{27} = f(x)$. Bây giờ ta sẻ chứng minh $f(x) \le 0$ (6) là được.

Nếu $\frac{1}{3}y + z^2 = 0 \Rightarrow y = z = 0$ thì BĐT (6) thành $-\frac{4}{27} \le 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $\frac{1}{3}y + z^2 \ne 0$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất . Theo TC2 thì để chứng minh $f(x) \le 0$ ta chỉ cần chứng minh cho $\begin{cases} f(0) \le 0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) \le 0 \end{cases}$. Dễ thấy $f(0) = y^2z - \frac{4}{27}$; vì $x = 0$ nên từ giả thiết $\Rightarrow y + z = 1$. Theo BĐT Côsi ta có $y^2z = \frac{1}{2}.y.y.(2z) \le \frac{1}{2}.\left[\frac{2\ \ y + z}{3}\right]^3 = \frac{4}{27}$

$\Rightarrow y^2z - \frac{4}{27} \le 0 \Rightarrow f(0) \le 0$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) = y^2z + \frac{1}{9}y + \frac{1}{3}z^2 - \frac{4}{27}$; vì $x = \frac{1}{3}$ nên từ giả thiết ta suy ra $y + z = \frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{2}{3} - y \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = y^2\left(\frac{2}{3} - y\right) + \frac{1}{9}y + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} - y\right)^2 - \frac{4}{27} = -y^3 + y^2 - \frac{1}{3}y =$

$= -y\left(y^2 - y + \frac{1}{3}\right) = -y\left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right] \le 0$ (đúng vì $y \ge 0$). Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(x) \le 0$. Ta đã giải xong bài toán.

Bài 2.28: Ta có $x^2 - 2(3m-1)x + m + 3 \ge 0 \Leftrightarrow f(m) = (-6x+1)m + x^2 + 2x + 3 \ge 0$. Ta thấy $f(m)$ là hàm số bậc nhất có hệ số của m là $-6x + 1 < 0$ (do $x \in \left[1; +\infty\ \ \right)$). Theo TC1 thì $f(m)$ là hàm nghịch biến $\Rightarrow f(m) \ge f(1)$ với $\forall m \le 1$. Tức là ta có $x^2 - 2(3m-1)x + m + 3 \ge (x-2)^2 \ge 0$ (đúng với $\forall x \in \left[1; +\infty\ \ \right)$).

Vậy là ta giải quyết xong bài toán.