Đáp án chuyên đề: Bất đẳng thức – Đại số 10

Bài 4.0: a) BĐT $\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2 \geq 0$

b) BĐT$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0$

c) BĐT $\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq 0$

d) BĐT$\Leftrightarrow (a-b+c)^2 \geq 0$

Bài 4.1: a) BĐT $\Leftrightarrow (a-b)c<0$

b) Sử dụng câu a), ta được: $\dfrac{a}{a+b}<\dfrac{a+c}{a+b+c}, \dfrac{b}{b+c}<\dfrac{b+a}{a+b+c}, \dfrac{c}{c+a}<\dfrac{c+b}{a+b+c}$.

Cộng các BĐT vế theo vế, ta được đpcm.

c) Sử dụng tính chất phân số, ta có: $\dfrac{a}{a+b+c+d}<\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a}{a+c}$

Tương tựta có $\dfrac{b}{a+b+c+d}<\dfrac{b}{b+c+d}<\dfrac{b}{b+d}, \dfrac{c}{a+b+c+d}<\dfrac{c}{c+d+a}<\dfrac{c}{a+c}$;

$\dfrac{d}{a+b+c+d}<\dfrac{d}{d+a+b}<\dfrac{d}{d+b}$. Cộng các BĐT vế theo vế ta được đpcm.

d) Chứng minh tương tự câu c). Ta có: $\dfrac{a+b}{a+b+c+d}<\dfrac{a+b}{a+b+c}<\dfrac{a+b+d}{a+b+c+d}$

Cùng với 3 BĐT tương tự, ta suy ra đpcm.

Bài 4.2: a) BĐT $\Leftrightarrow abx^2+\left(a^2+b^2\right)xy+aby^2 \geq (a+b)^2xy$

$\Leftrightarrow ab(x-y)^2 \geq 0$ (đúng)

b) Bình phương 2 vế, ta phải chứng minh: $\dfrac{(c+a)^2}{c^2+a^2} \geq \dfrac{(c+b)^2}{c^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (a-b)(c^2-ab) \geq 0$. Điều này hiển nhiên đúng do giải thiết.

c) Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b} \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2c}, \dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{c}{2a}$

BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{a}{b}+1}{2\frac{a}{b}-1}+\dfrac{\frac{c}{b}+1}{2\frac{c}{b}-1} \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2c}+1}{1+\frac{a}{c}-1}+\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{c}{2a}+1}{1+\frac{c}{a}-1} \geq 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{3c}{2a}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3a}{2c}+\dfrac{1}{2} \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2+c^2}{ac} \geq 3 \Leftrightarrow (a-c)^2 \geq 0$ (đúng)

d) BĐT $\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$ (đúng)

Bài 4.3: a) BĐT $\Leftrightarrow -x^3y+xy^3+x^3z-y^3z-xz^3+yz^3\le 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)\le 0$ (đúng vì $x\ge y\ge z\ge 0$)

b) BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx)\ge 0$ (đúng vì $x\ge y\ge z\ge 0$)

Bài 4.4: Ta có: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}}\le\dfrac{1}{\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+d}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\dfrac{a+b}{ab}}+\dfrac{1}{\dfrac{c+d}{cd}}\le\dfrac{1}{\dfrac{a+b+c+d}{a+c\quad b+d}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{cd}{c+d}\le\dfrac{a+c\quad b+d}{a+b+c+d}\Leftrightarrow\dfrac{ab\;\; c+d\;\;+cd\;\;a+b}{a+b\quad c+d}\le\dfrac{a+c\quad b+d}{a+b+c+d}$

$\Leftrightarrow \dfrac{abc+abd+acd+bcd}{ac+ad+bc+bd}\le\dfrac{ab+ad+bc+cd}{a+b+c+d}$

$\Leftrightarrow\quad a+b+c+d\quad abc+abd+acd+bcd\;\;\le\;\; ab+ad+bc+cd\quad ac+ad+bc+bd$

$\Leftrightarrow 2abcd\le a^2d^2+b^2c^2\Leftrightarrow a^2d^2-2abcd+b^2c^2\ge 0\Leftrightarrow\;\; ad-bc\;^{2}\ge 0$.

Do bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Bài 4.5: Vì $a,b,c\in\left[1;3\right]$ do đó ta có

$a-1\quad b-1\quad c-1\;+\;3-a\quad 3-b\quad 3-c\;\ge 0$

$\Leftrightarrow 2\;\; ab+bc+ca\;\;-8\;\;a+b+c\;\;+26\ge 0\Leftrightarrow\;\; a+b+c\;^{2}-8\;\;a+b+c\;\;+26\ge a^2+b^2+c^2$

Mà $a+b+c=6$ suy ra $a^2+b^2+c^2\le 14$.

Bài 4.6: Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có:

$x^3+y^2\ge 2xy\sqrt{x}\Rightarrow\dfrac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}\le\dfrac{2\sqrt{x}}{2xy\sqrt{x}}=\dfrac{1}{xy}$.

Tương tự: $\dfrac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}\le\dfrac{1}{yz};\;\dfrac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\dfrac{1}{zx}\Rightarrow \text{VT}\le\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$.

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\le\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$

Vậy : $\text{VT}\le\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\Rightarrow$ đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 4.7: Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $1+x^3+y^3\ge 3xy\Rightarrow\dfrac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$

Chứng minh tương tự, ta được: $\dfrac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$, $\dfrac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right) \quad 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}+\dfrac{1}{\sqrt{yz}}+\dfrac{1}{\sqrt{zx}} \ge \dfrac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = 3 \qquad 2$

Từ (1) và (2), ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 4.8: $\dfrac{1}{1+a} = 1-\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}+\dfrac{d}{1+d} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{1+b \quad 1+c \quad 1+d}}$

Xây dựng các BĐT tương tự rồi nhân vế với vế ta được $abcd \le \dfrac{1}{81}$

Bài 4.9: $1-\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{1+b-a}{1+b} = \dfrac{b}{1+c}+\dfrac{c}{1+a} \ge 2\sqrt{\dfrac{bc}{1+c \quad 1+a}}$

Chứng minh tương tự, ta thu được:

$$1+b-a \quad 1+c-b \quad 1+a-c \ \ge 8abc$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+b}{a}-1\right)\left(\frac{1+c}{b}-a\right)\left(\frac{1+a}{c}-1\right) \ge 8$$

Bài 4.10: Ta có $1 = xyz \ \ x+y+z \ = yz \ \ x^2+xy+xz$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$P = \ x \ + \ y \ \ x \ + \ z \ = yz + \ x^2+xy+zx \ \ge 2\sqrt{yz. \ x^2+xy+zx} \ = 2$

Suy ra $\min P = 2$.

Bài 4.11: Ta có $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{ab+cb+ca+a^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{\ a+b \quad a+c\ }} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}\right)$

Tương tự $\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}\right), \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a+c}+\dfrac{c}{b+c}\right)$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.12: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}} = \frac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}} = \frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$$

Tương tự ta có $\dfrac{bc}{\sqrt{a+bc}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{a+b}+\dfrac{bc}{a+c}\right), \dfrac{ca}{\sqrt{b+ca}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ca}{b+a}+\dfrac{ca}{b+c}\right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được $\dfrac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\dfrac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\dfrac{ca}{\sqrt{b+ca}} \le \dfrac{1}{2}$.

Bài 4.13: BĐT $\Leftrightarrow a+b+c+\dfrac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca} \ge 6$

Áp dụng BĐT côsi ta có $a+b+c+\dfrac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca} \ge 2\sqrt{\dfrac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $2\sqrt{\dfrac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}} \ge 6$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ (đúng)

Bài 4.14: Ta có $(1+abc)\left(\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}\right)+3=$

$$=\left(\frac{1+abc}{a(1+b)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{b(1+c)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{c(1+a)}+1\right)$$

$$=\frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)}+\frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)}+\frac{1+c+ca+abc}{c(1+a)}$$

$$=\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{c(1+b)}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{c(1+a)}$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+a)} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1+a}{a(1+b)}.\frac{1+b}{b(1+c)}.\frac{1+c}{c(1+a)}}=3$$

$$\frac{b\ 1+c}{a\ 1+b}+\frac{c\ 1+b}{b\ 1+c}+\frac{a\ 1+b}{c\ 1+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b\ 1+c}{a\ 1+b}.\frac{c\ 1+b}{b\ 1+c}.\frac{a\ 1+b}{c\ 1+a}}=3$$

Suy ra $1+abc\left(\frac{1}{a\ 1+b}+\frac{1}{b\ 1+c}+\frac{1}{c\ 1+a}\right)+3\geq 6$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a\ 1+b}+\frac{1}{b\ 1+c}+\frac{1}{c\ 1+a}\geq \frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 4.15: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}.\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}.\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\frac{a+b}{2ab}.\frac{b+c}{2bc}.\frac{c+a}{2ca}\geq 1$ (*)

Ta có $\frac{a+b}{2ab}.\frac{b+c}{2bc}.\frac{c+a}{2ca}\geq \frac{2\sqrt{ab}}{2ab}.\frac{2\sqrt{bc}}{2bc}.\frac{2\sqrt{ca}}{2ca}=\frac{2}{abc}$ (1)

Mặt khác $3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\leq 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (*) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 4.16: Ta có BĐT $\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 2.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{a}{c}.\frac{a}{a}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$

Tương tự ta có $\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}\geq \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}, \frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\geq \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\geq 3.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Mặt khác theo BĐT côsi ta có $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3$

Do đó $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 2.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4.17: Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3a(2b+2c-a)}}\geq\frac{a\sqrt{6}}{a+b+c}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}}\geq\frac{b\sqrt{6}}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}\geq\frac{c\sqrt{6}}{a+b+c}$

Cộng 3 BĐT trên ta được:

$P\geq\frac{\sqrt{6}(a+b+c)}{a+b+c}=\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy $\min P=\sqrt{6}$.

Bài 4.18: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$a^3+b^3+b^3\geq 3ab^2,\ b^3+c^3+c^3\geq 3bc^3,\ c^3+a^3+a^3\geq 3ca^2$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$3\ \ a^3+b^3+c^3\ \ \geq 3\ \ ab^2+bc^2+ca^2$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\geq ab^2+bc^2+ca^2$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{a^3}{b}+ab\geq 2a^2,\ \frac{b^3}{c}+bc\geq 2b^2,\ \frac{c^3}{a}+ca\geq 2c^2$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\geq 2\ \ a^2+b^2+c^2$

(1)

Lại có, $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\geq 2\ \ ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

c) Áp dụng BĐT côsi $\frac{a^6}{b^3}+\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}\ge\frac{3a^4}{c}$

Chứng minh tương tự, ta thu được: $\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}\ge\frac{a^4}{c}+\frac{b^4}{a}+\frac{c^4}{b}$

Bài 4.19: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $a^3+b^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge ab\sqrt{3}$

$b^3+c^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge bc\sqrt{3},\ c^3+a^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge ca\sqrt{3}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ge\sqrt{3}\left(ab+bc+ca\right)=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 4.20: Ta có: $4\left(a+b+c\right)=3abc\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{3}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{ab}$

$\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{bc},\ \frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{ca}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+\frac{3}{8}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{9}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge\frac{3}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$

Bài 4.21: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{a^3}{b\ \ b+c}+\frac{b}{2}+\frac{b+c}{4}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b\ \ b+c}.\frac{b}{2}.\frac{b+c}{4}}=\frac{3}{2}a$$

Tương tự, ta có: $\frac{b^3}{c\ \ c+a}+\frac{c}{2}+\frac{c+a}{4}\geq\frac{3}{2}b$, $\frac{c^3}{a\ \ a+b}+\frac{a}{2}+\frac{a+b}{4}\geq\frac{3}{2}c$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{b\ \ b+c}+\frac{b^3}{c\ \ c+a}+\frac{c^3}{a\ \ a+b}+a+b+c\geq\frac{3}{2}\ \ a+b+c$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b\ \ b+c}+\frac{b^3}{c\ \ c+a}+\frac{c^3}{a\ \ a+b}\geq\frac{1}{2}\ \ a+b+c$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{a^3}{b+2c\ ^2}+\frac{b+2c}{27}+\frac{b+2c}{27}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b+c\ ^2}.\frac{b+2c}{27}.\frac{b+2c}{27}}=\frac{a}{3}$$

Tương tự, ta có: $\frac{b^3}{c+2a\ ^2}+\frac{c+2a}{27}+\frac{c+2a}{27}\geq\frac{b}{3}$,

$$\frac{c^3}{a+2b\ ^2}+\frac{a+2b}{27}+\frac{a+2b}{27}\geq\frac{c}{3}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{b+2c\ ^2}+\frac{b^3}{c+2a\ ^2}+\frac{c^3}{a+2b\ ^2}+\frac{a+b+c}{9}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b+2c\ ^2}+\frac{b^3}{c+2a\ ^2}+\frac{c^3}{a+2b\ ^2}\geq\frac{2\ \ a+b+c}{9}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 4.22: Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực không âm ta có :

$x^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{x^3.1.1}=3x\Leftrightarrow x^3+2\geq 3x$.Tương tự : $y^3+2\geq 3y;\ z^3+2\geq 3y$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được : $x^3 + y^3 + z^3 + 6 \ge 3(x + y + z)$

Mặt khác : $x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \Rightarrow 2(x + y + z) \ge 6$.

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 6 \ge (x + y + z) + 2(x + y + z) \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \ge x + y + z$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 4.23: Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$a^4 + \frac{1}{81} \ge \frac{2}{9}a^2$; $b^4 + \frac{1}{81} \ge \frac{2}{9}b^2$; $c^4 + \frac{1}{81} \ge \frac{2}{9}b^2$ cộng ba BĐT lại với nhau

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{27} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{9} + \frac{a^2+b^2+c^2}{9} .$$

Mặt khác: $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 9(a^4 + b^4 + c^4) \ge a^2 + b^2 + c^2$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 4.24: Đặt $a = 1 + \frac{1}{x};\ b = 1 + \frac{1}{y};\ c = 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow a + b + c \ge 12$

Ta có : $a^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 \ge 4\sqrt[4]{4^{12}a^4} = 4^4 a \Leftrightarrow a^4 + 3.4^4 \ge 4^4 a$. Tương tự

$b^4 + 3.4^4 \ge 4^4 b;\quad c^4 + 3.4^4 \ge 4^4 c$ cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được

$a^4 + b^4 + c^4 + 9.4^4 \ge 4^4(a + b + c) \ge 12.4^4 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \ge 3.4^4 = 768$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 4 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 4.25: a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{2ab} + \left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \ge \frac{1}{2ab} + 2\sqrt{\frac{1}{2ab\ \ a^2+b^2}} \ge \frac{2}{a+b\ ^2} + 2\sqrt{\frac{4}{a+b\ ^2}} = 6$$ b)

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$A = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{2}{ab} + 4ab = \left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}\right) + \frac{5}{4ab} + \left(\frac{1}{4ab} + 4ab\right).$$

$$A \ge \frac{4}{a+b\ ^2} + \frac{5}{a+b\ ^2} + 4\sqrt{\frac{1}{4ab}.4ab} = 4 + 5 + 4 = 11.$$

c) Ta có $\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{a^2b^2+1}{b^2}.\frac{a^2b^2+1}{a^2} = \left(ab + \frac{1}{ab}\right)^2$

Ta có: $ab + \frac{1}{ab} = \left(ab + \frac{1}{16ab}\right) + \frac{15}{16ab}$ (1)

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $ab + \frac{1}{16ab} \geq 2\sqrt{ab.\frac{1}{16ab}} = \frac{1}{2}$ (2)

mà $\frac{1}{2} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ nên $ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow ab + \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{16}.4 = \frac{17}{4}$

$$\Rightarrow \left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{a^2}\right) \geq \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$$

Bài 4.26: Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2 + \frac{1}{4} \geq a \Rightarrow a^2 + b + \frac{3}{4} \geq a + b + \frac{1}{2}$

$b^2 + \frac{1}{4} \geq b \Rightarrow b^2 + a + \frac{3}{4} \geq a + b + \frac{1}{2}$

Suy ra $\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2$ (1)

Theo BĐT côsi ta lại có $\left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{2a+2b+1}{2}\right)^2 = \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.27: Trước tiên, ta dễ dàng có $xyz \leq 1$

Áp dụng côsi ta có $\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$$= \frac{1}{2xyz} + \left[\frac{1}{2xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right] \geq \frac{1}{2xyz} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$= \frac{1}{2xyz} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xy+xz \quad yz+yx \quad zx+zy}}$$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{xy+xz+yz+yx+zx+zy}{3}\right)^3}} = \frac{3}{2}$$

Bài 4.28: Ta có $\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y+2}{27} + \frac{y^2-2y+4}{27} \geq \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x^3}{y^3+8} \geq \frac{9x+y-y^2-6}{27}$

Tương tự ta có

$\dfrac{y^3}{z^3+8} \ge \dfrac{9y+z-z^2-6}{27}, \dfrac{z^3}{x^3+8} \ge \dfrac{9z+x-x^2-6}{27}$ nên

$VT \ge \dfrac{10\left(x+y+z\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)-18}{27} = \dfrac{12-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{27}$ mà ta lại có

$$\frac{12-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{27} = \frac{3+\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{27} = \frac{1}{9}+\frac{2}{27}\left(xy+yz+zx\right)$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh . Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài 4.29: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{\left(a+4b\right)\left(3a+2b\right)} \le \frac{1}{2}\left(4a+6b\right) = 2a+3b$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \ge \frac{a^2}{2a+3b}$$

Mặt khác $\dfrac{a^2}{2a+3b}+\dfrac{2a+3b}{25} \ge \dfrac{2a}{5} \Rightarrow \dfrac{a^2}{2a+3b} \ge \dfrac{8a-3b}{25}$

Do đó $\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \ge \dfrac{8a-3b}{25}$

Tương tự ta có $\dfrac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} \ge \dfrac{8b-3c}{25}, \dfrac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \dfrac{8c-3a}{25}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 4.30: Áp dụng bất đẳng thức BĐT côsi ta có

$$6\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} \le \left(1+\frac{16x}{y+z}\right)+9 = \frac{2(8x+5y+5z)}{y+z}$$

Suy ra $\sqrt{1+\dfrac{16x}{y+z}} \le \dfrac{8x+5y+5z}{3(y+z)}$ (*). Sử dụng (*), ta có

$$\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} = \left(\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}-1\right)+1 = \frac{\frac{16x}{y+z}}{\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+1}+1 \ge \frac{\frac{16x}{y+z}}{\frac{8x+5y+5z}{3(y+z)}+1}+1 = \frac{6x}{x+y+z}+1.$$

Tương tự, ta cũng có $\sqrt{1+\dfrac{16y}{z+x}} \ge \dfrac{6y}{x+y+z}+1, \quad \sqrt{1+\dfrac{16z}{x+y}} \ge \dfrac{6z}{x+y+z}+1.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.