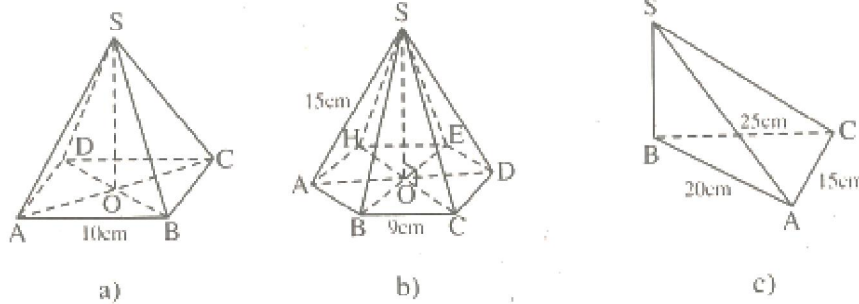


## Chuyên đề 2 HÌNH CHÓP ĐỀU

4.1. (h.4.21a) ta có tam giác AOS vuông tại O (vì  $SO \perp AC$ ) suy ra  $SA^2 = SO^2 + OA^2$

$$AC = AB\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{1}{2} AC = 5\sqrt{2} (cm)$$

$$\text{Vậy } SO^2 = SA^2 - OA^2 = 50 \Rightarrow SO = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} (cm)$$



Hình 4.21

4.2. (Hình 4.21b) Vì S.ABCDEH là hình chóp đều nên đáy là hình lục giác đều tâm O. Tam giác AOB đều nên  $AB = BO = OA = 9cm$

Tam giác SOA vuông tại O nên  $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 144 \Rightarrow SO = 12(cm)$

4.3. (Hình 4.21c)

a) Ta có  $SB \perp mp(ABC)$  mà  $AC \subset mp(ABC)$ , suy ra  $SB \perp AC$

b) Vì  $SB \perp AC, AB \perp AC$  nên  $AC \perp mp(SAB) \Rightarrow AC \perp SA$

c) Áp dụng định lí Pytago ta có:

$$SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = 15cm; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 5\sqrt{38} (cm); BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 (cm)$$

4.4.  $V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} 217^2 \cdot 138 = 2166094 (m^3)$

4.5. a) Ta có  $SA \perp SC; SA \perp SB$  nên  $SA \perp mp(SBC)$

b) Áp dụng định lí Pytago ta có :

$$SB = \sqrt{AB^2 - SA^2} = \sqrt{5}; SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = \sqrt{12} (cm)$$

$$S_{xq} = S_{SAC} + S_{SAB} + S_{SBC} = \frac{1}{2}(SA \cdot SC + SA \cdot SB + SB \cdot SC)$$

$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{12} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{12})(cm)$$

$$c) V = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot SA = \frac{2\sqrt{6}}{3} (cm^3)$$

4.6. theo đề ta có  $AB = BC = CD = DA = b; A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = a$

$$OO' = MH = \frac{ab}{a+b}; HN = O'N - O'H = \frac{a-b}{2}$$

Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông MHN ta có:

$$MN = \sqrt{MH^2 + HN^2} = \sqrt{\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{4(a+b)^2}} = \frac{a^2 + b^2}{2(a+b)}$$

$$S_{xq} = (p + p')d = (2a + 2b) \cdot MN = a^2 + b^2 = S_{ABCD} + S_{A'B'C'D'}$$

Vậy diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy.

$$4.7. a) S_{\text{đáy lớn}} = \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}$$

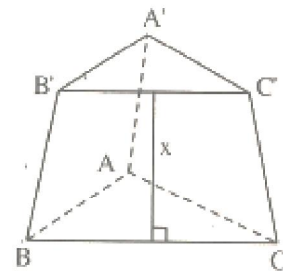
$$S_{\text{đáy nhỏ}} = \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$$

$$S_{xq} = 100\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 136\sqrt{3} (cm^2)$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy lớn}} + S_{\text{đáy nhỏ}} = 2S_{xq} = 272\sqrt{3} (cm^2)$$

$$b) S_{tp} = 2S_{xq} = 2 \frac{(20+12)x}{2} \text{ (với } x \text{ là chiều cao mặt bên)}$$

$$\Rightarrow 272\sqrt{3} = (20+12)x \Rightarrow x = \frac{272\sqrt{3}}{32} = \frac{17\sqrt{3}}{2}$$



Hình 4.22

4.8. Vì ABCD; A'B'C'D' là các hình vuông nên  $AC = 10\sqrt{2}$ ,  $A'C' = 6\sqrt{2}$ . Vẽ  $C'M \perp AC$  thì  $\triangle CC'M$  vuông cân tại M. vẽ  $A'N \perp AC$  thì tam giác AA'M vuông cân tại M.

Ta có :  $\triangle AA'N = \triangle CC'M$  :

$$AN = CM = A'N = C'M = \frac{AC - MN}{2}$$

$$= \frac{AC - A'C'}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow CC' = CM\sqrt{2} = 4$$

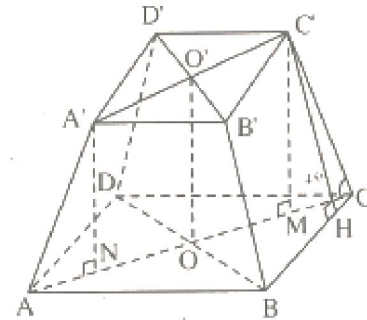
Vẽ đường cao CH của hình thang BB'C'C

Ta có  $CH = \frac{BC - B'C'}{2} = 2(\text{cm})$

Trong tam giác vuông CC'H có

$$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{12}(\text{cm})$$

Diện tích xung quanh hình chóp :



Hình 4.23

4.9. Gọi a là cạnh đáy hình chóp; h là chiều cao. Thể tích ban đầu của hình chóp là:

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2h$$

Gấp đôi cạnh đáy và giảm chiều cao đi một nửa thì thể tích hình chóp lúc sau là :

$$V_2 = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot 2a^2h = 2V_1$$

4.10. Vì các cạnh hình chóp đều bằng 1 trừ SA = x nên tứ giác ABCD là hình thoi( h. 4.24)

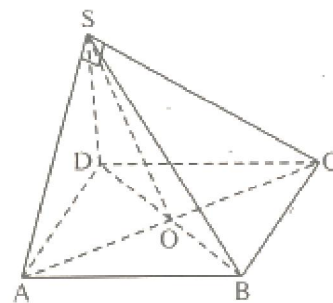
a) Ta có

$$\triangle SBD = \triangle ABD = \triangle CBD(c.c.c) \Rightarrow SO = AO = CO ($$

O là giao điểm hai đường chéo đáy ABCD) hay

$$SO = \frac{AC}{2}$$

Vậy tam giác SAC vuông tại A ( vì có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng .



Hình 4.24

b) Từ giả thiết suy ra  $\Delta SBD$  cân tại

$SO \perp BD$ , mà  $BD \perp AC$  ( $ABCD$  là hình thoi) nên

$OB \perp mp(SAC)$

$$\text{Lại có: } V_{S.ABCD} = 2V_{B.SAC} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{ACS} \cdot OB$$

$$\text{Trong đó } S_{ACS} = \frac{1}{2} SA \cdot SC = \frac{x}{2}$$

Mặt khác tam giác  $SAC$  vuông tại  $S$  nên:  $AC^2 = SA^2 + SC^2 = x^2 + 1 \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 1}$  và tam

giác  $AOB$  vuông tại  $O$  nên:  $OB^2 = AB^2 - OA^2 = 1 - \frac{x^2 + 1}{4} = \frac{3 - x^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{3 - x^2}}{2}\right)^2$

$$\text{Vậy } OB = \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2} \Rightarrow V = V_{S.ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 - x^2} = \frac{1}{6} x \sqrt{3 - x^2}$$

$$\text{Ta có; } x\sqrt{3 - x^2} \leq \frac{x^2 + (3 - x^2)}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow V \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } \max V = \frac{1}{4}$$

**4.11.** Gọi  $x$  là độ dài cạnh đáy hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ , đường cao mặt bên là  $SI$ .

$$\text{Ta có: } SI^2 = SA^2 - AI^2 = a^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow SI = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}$$

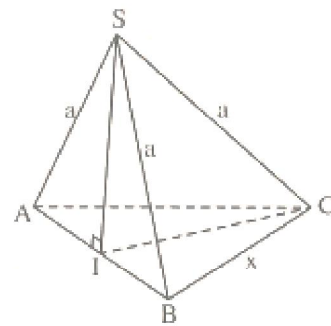
Diện tích xung quanh hình chóp:

$$S = 3S_{ABS} = 3AB \cdot SI = \frac{3x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}$$

$$\text{có } x\sqrt{4a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + (4a^2 - x^2)}{2} = 2a^2$$

$$\text{Suy ra } S \leq \frac{3}{4} \cdot 2a^2 = \frac{3}{2} \cdot a^2$$

(dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x^2 = 2a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$ )



Hình 4.25

**4.24.a)**  $\Delta ABC$  đều, nên đường trung tuyến  $AI$  cũng là đường cao  $\Rightarrow AI \perp BC$ .

Mặt khác  $SA \perp BC$  (vì  $SA \perp mp(ABC)$ )  $\Rightarrow BC \perp mp(SAI) \Rightarrow mp(ABC) \perp mp(SAI)$

b) Gọi H là trực tâm tam giác SBC. Trong mp(SAI), từ H dựng đường thẳng  $d \perp SI$ . Đường thẳng d cắt AI tại G

do  $BC \perp mp(SAI)$  nên  $BC \perp d$ . Từ đó:  $d \perp mp(SBC) \Rightarrow d \perp SB$

Mặt khác:  $CH \perp SB$  (H là trực tâm tam giác SBC)

Do đó  $SB \perp CG$

Lại có  $SA \perp CG$  (vì  $SA \perp mp(ABC)$ ) có chứa CG)

$\Rightarrow CG \perp mp(SAB) \Rightarrow CG \perp AB$ . Kết hợp  $AG \perp BC$  ta

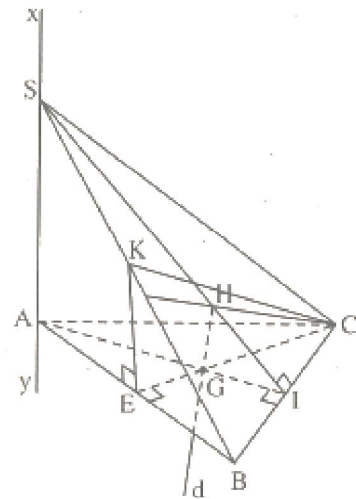
có G là trực tâm tam giác ABC.

c) Gọi E là trung điểm của AB. Khi đó KE là đường trung bình của tam giác SAB nên  $KE \parallel SA$ .

Trong mp(SAB) có:  $SA \perp AB$  nên  $KE \perp AB$

Lại có  $CE \perp AB \Rightarrow AB \perp mp(CKE)$

Vậy CK luôn nằm trong mặt phẳng cố định vuông góc với AB tại trung điểm của AB.



Hình 4.26

4.25. Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, AH cắt BC tại M  $\Rightarrow MB = MC = \frac{3}{2}a$  (h.4.27)

$\Delta MAB$  vuông tại M nên

$$AM^2 = AB^2 - MB^2 = 9a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{27a^2}{4}$$

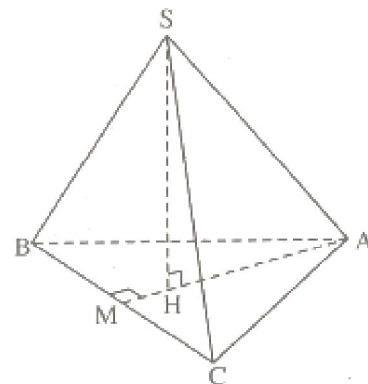
Suy ra

$$AM = \frac{\sqrt{27a^2}}{2}; AH = \frac{2}{3}AM = \frac{\sqrt{27a^2}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{27a^2}}{3}$$

$\Delta SAH$  vuông tại H nên

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = 4a^2 - \frac{27a^2}{9} = a^2$$

Vậy  $AH = a$



Hình 4.27