Đáp án chuyên đề:

Một số phương trình quy về bậc nhất hoặc bậc hai

Đại số 10

Bài 3.24: a) Ta có: $|3x-2|=\begin{cases}3x-2 \text{ khi } x\ge \dfrac{2}{3}\\ -3x+2 \text{ khi } x<\dfrac{2}{3}\end{cases}$

* Nếu $x\ge\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$PT$\Leftrightarrow 3x-2=x^2+2x+3\Leftrightarrow x^2-x+5=0$ pt vô nghiệm .

* Nếu $x<\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$PT$\Leftrightarrow -3x+2=x^2+2x+3\Leftrightarrow x^2+5x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ hai nghiệm này đều thỏa mãn $x<\dfrac{2}{3}$.

Vậy nghiệm của pt đã cho là $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$.

b) $x=1,\ x=-1\pm\sqrt{2}$

Bài 3.25: a) Đặt $t=|2x-1|, t\ge 0$.

Phương trình trở thành $t^2-3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(l)\\ t=4\end{array}\right.$

Với $t=4$ ta có $|2x-1|=4\Leftrightarrow 2x-1=\pm 4\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$ hoặc $x=-\dfrac{3}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-\dfrac{3}{2}$ và $x=\dfrac{5}{2}$

b) ĐKXĐ: $x\ne 0$. Đặt $t=\left|\dfrac{x^2-2}{x}\right|, t\ge 0$

Phương trình trở thành $t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=2\end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có $\left|\dfrac{x^2-2}{x}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\pm\sqrt{3}\\ x=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1\pm\sqrt{3}$ và $x=1\pm\sqrt{3}$.

Bài 3.26: Phương trình $\Leftrightarrow(x-1)^2-2|x-1|+m+2=0$

Đặt $t = |x-1|, t \ge 0$ ta có phương trình: $t^2 - 2t + m + 2 = 0$ (1)

a) Khi $m = -2$ ta có $t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Suy ra nghiệm phương trình là $x = 1, x = 3,\ x = -1$

b) Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $t \ge 0$

$\Leftrightarrow m = -t^2 + 2t - 2$ có nghiệm $t \ge 0 \Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $f(t) = -t^2 + 2t - 2$ với $t \in [0; +\infty)$ cắt trục hoành. $\Leftrightarrow m \le -2$.

Bài 2.37: a) Ta có $PT \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 2m = x + 1 \\ mx + 2m = -\quad x + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m - 1 \quad x = 1 - 2m & 1 \\ m + 1 \quad x = -2m - 1 & 2 \end{array}\right.$

Giải (1): Với $m = 1$ phương trình trở thành $0x = -1$ phương trình vô nghiệm

Với $m \ne 1$ phương trình tương đương với $x = \dfrac{1 - 2m}{m - 1}$

Giải (2): Với $m = -1$ phương trình trở thành $0x = 1$ phương trình vô nghiệm

Với $m \ne -1$ phương trình tương đương với $x = \dfrac{-2m - 1}{m + 1}$

Kết luận: $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$ phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{-3}{2}$

Với $\begin{cases} m \ne 1 \\ m \ne -1 \end{cases}$ phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1 - 2m}{m - 1}$ và $x = \dfrac{-2m - 1}{m + 1}$

b) Ta có $|mx + 2x| = |mx - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 2x = mx - 1 \\ mx + 2x = -\quad mx - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\dfrac{1}{2} & \\ (2m + 2)x = 1 & (*) \end{array}\right.$

Với phương trình (*) ta có

$m = -1$ thì phương trình (*) vô nghiệm

$m \ne -1$ thì phương trình (*) có nghiệm $x = \dfrac{1}{2m + 2}$

Kết luận: $m = -1$ phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$

$m \ne -1$ phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$ và $x = \dfrac{1}{2m + 2}$.

Bài 3.28: a) *ĐKXĐ:* $x \ne \pm 3; x \ne -\dfrac{7}{2}$

$PT \Leftrightarrow \dfrac{13}{x - 3 \quad 2x + 7} + \dfrac{1}{2x + 7} = \dfrac{6}{x - 3 \quad x + 3}$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow \quad x - 3 \quad x + 4 \quad = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -4$.

b) $x=1,\ x=5$

c) Điều kiện: $x \notin \quad -3;-2;1;4$

$$PT \Leftrightarrow 1+\frac{2}{x-1}+1-\frac{4}{x+2}+1-\frac{6}{x+3}+1+\frac{8}{x-4}=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-8}{(x-1)(x-4)}-\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-\frac{16}{5}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{69}{5}}\right)$$

Đối chiếu với điều kiện phương trình có nghiệm là $x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{69}{5}}\right)$.

Bài 3.29: a) Điều kiện: $x \notin \left\{1;\frac{2}{3}\right\}$

Với $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Với $x\neq 0$ ta có $PT \Leftrightarrow \dfrac{2}{3x-5+\dfrac{2}{x}}+\dfrac{13}{3x+1+\dfrac{2}{x}}=6$

Đặt $t=3x+\frac{2}{x}$ phương trình trở thành $PT \Leftrightarrow \frac{2}{t-5}+\frac{13}{t+1}=6$

Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình là $x=\frac{1}{2};x=\frac{4}{3}$.

b) Điều kiện: $x \notin \left\{0;\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^2}}{\dfrac{x^3+x^2-x}{x^2}}=3 \Leftrightarrow \frac{x^2+\dfrac{1}{x^2}+3}{x-\dfrac{1}{x}+1}=3$$

Đặt $t=x-\frac{1}{x}$ phương trình trở thành $\frac{t^2+5}{t+1}=3$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};x=1\pm\sqrt{2}$.

c) Điều kiện: $x\neq -1;x\neq 0$

$$PT \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2+\frac{2}{x\quad x+1}=15 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}-15=0$$

Đặt $\frac{1}{x(x+1)}=t$ ta được phương trình $t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow t=3;t=-5$

$+) t = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x+1)} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$

$+) t = -5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x+1)} = -5 \Leftrightarrow 5x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$

Đối chiếu với điều kiện (*) thì phương trình có bốn nghiệm $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}; x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$.

Bài 3.30: a) Điều kiện: $x \neq 2; x \neq 3$

Đặt $u = \dfrac{x+1}{x-2}; v = \dfrac{x-2}{x-3}$ ta được

$u^2 + uv = 12v^2 \Leftrightarrow (u-3v)(u+4v) = 0 \Leftrightarrow u = 3v; u = -4v$

+)

$u = 3v \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-2} = 3\dfrac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 3x^2 - 12x + 12 \Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$

+)

$u = -4v \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-2} = -4\dfrac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = -4x^2 + 16x - 16 \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 19 = 0 \Leftrightarrow \nexists x$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$.

b) ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq \dfrac{-1}{3}$

Đặt $u = 3x^2 + x,\ v = x + 1, u \neq 0, v \neq 0$

Khi đó phương trình trở thành $\dfrac{2u}{v} + \dfrac{13u}{v+6u} = 6 \Leftrightarrow 4u^2 - 7uv - 2v^2 = 0$

$\Leftrightarrow (4u+v)(u-2v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4u = -v \\ u = 2v \end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được nghiệm của pt là $x \in \left\{\dfrac{-1}{2}; \dfrac{1}{3}\right\}$

Bài 3.31: ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$

$PT \Leftrightarrow \quad ax - 1 \quad x + 1 \quad + 2 \quad x - 1 \quad = a \quad x^2 + 1$

$\Leftrightarrow ax^2 + ax - x - 1 + 2x - 2 = ax^2 + a \Leftrightarrow \quad a + 1 \quad x = a + 3$

- Nếu $a \neq -1$ thì $x = \dfrac{a+3}{a+1}$. Ta có $\dfrac{a+3}{a+1} \neq 1$, xét $\dfrac{a+3}{a+1} \neq -1 \Leftrightarrow a \neq -2$
- Nếu $a = -1$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy: -Với $a \neq -1$ và $a \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a+3}{a+1}$

-Với $a = -1$ hoặc $a = -2$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 3.32: Điều kiện: $x \neq a, x \neq b$:

Ta có: PT $\Leftrightarrow 2(x-a)(x-b)=a(x-a)+b(x-b)$

$\Leftrightarrow 2x^2-3(a+b)x+a^2+b^2+2ab=0 \Leftrightarrow 2x^2-3(a+b)x+(a+b)^2=0$

Phương trình có hai nghiệm là $x_1=a+b$ và $x_2=\dfrac{a+b}{2}$

Ta có $x_1\neq a\Leftrightarrow b\neq 0$, $x_1\neq b\Leftrightarrow a\neq 0$, $x_2\neq a\Leftrightarrow x_2\neq b\Leftrightarrow a\neq b$

$x_1\neq x_2\Leftrightarrow a+b\neq\dfrac{a+b}{2}\Leftrightarrow a\neq -b$

Vậy với $a\neq\pm b; a\neq 0, b\neq 0$ thì pt có hai nghiệm phân biệt

Bài 3.33: a) $Pt \Leftrightarrow \begin{cases}3x+1\geq 0\\ 2x+1=(3x+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\dfrac{1}{3}\\ 9x^2+4x=0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\dfrac{1}{3}\\ x=0,\ x=-\dfrac{4}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\dfrac{4}{9}\end{array}\right.$

b) $PT\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x^3-5x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\end{array}\right.$

c) $PT\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-x^2-1\geq 0\\ x^4+3x+1=x^4-x^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-x^2-1\geq 0\\ x^2+3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-2$

d) $Pt\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 0\\ 2x+\sqrt{6x^2+1}=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ \sqrt{6x^2+1}=x^2+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ 6x^2+1=(x^2+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x^4-4x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0, x=2$

e) $\left(1+\sqrt{3+x}\right)^2=9x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}+1=3x\\ \sqrt{x+3}+1=-3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}\end{array}\right.$

f) $x^2-(x+7)+(x+\sqrt{x+7})=0\Leftrightarrow(x+\sqrt{x+7})(x-\sqrt{x+7}+1)=0$

Từ đó phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2; x=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$.

Bài 3.34: a) ĐKXĐ: $x\geq\dfrac{5}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3\ \ x-2\ \ +\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$$\Leftrightarrow \ x-2\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0(*) \end{array}\right.$$

Do $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}\Rightarrow\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}<0$ nên pt (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất *x = 2*.

b) Ta dự đoán được nghiệm $x=\pm 1$, và ta viết lại phương trình như sau:

$$PT\Leftrightarrow 3\ \sqrt[3]{x^2}-1\ +\ \sqrt{x^2+8}-3\ =\ \sqrt{x^2+15}-4$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\ \ x^2-1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} \end{array}\right.$$

Mặt khác, ta có:

$$\sqrt{x^2+15}>\sqrt{x^2+8}\Rightarrow\sqrt{x^2+15}+4>\sqrt{x^2+8}+3\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

Nên phương trình thức hai vô nghiệm.

Vậy pt có 2 nghiệm $x=1,x=-1$.

c) ĐKXĐ: $x\geq\dfrac{1}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{5x-1}-2+\sqrt[3]{9-x}-2=2x^2+3x-5$$

$$\Leftrightarrow\frac{5\ \ x-1}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1-x}{\sqrt[3]{9-x}\ \ ^2+2\sqrt[3]{9-x}+4}=\ \ x-1\ \ \ 2x+5$$

$$\Leftrightarrow\ x-1\left[2x+5-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{9-x}\ \ ^2+2\sqrt[3]{9-x}+4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ x-1\left[2x+\frac{5\sqrt{5x-1}+5}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{9-x}\ \ ^2+2\sqrt[3]{9-x}+4}\right]=0$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=1$.

d) ĐKXĐ: $x\geq 1$