

Chuyên đề nâng cao 2
BẤT ĐẲNG THỨC
VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

A.MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP

1. phương pháp biến đổi tương đương

Nội dung của phương pháp này là dùng các phép biến đổi tương đương đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức đã được khẳng định là đúng.

Ví dụ 23. Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng với mọi a, b, c nên bất đẳng thức (1) đúng với mọi a, b, c

Đẳng thức xảy ra khi $a-b=b-c=c-a=0$ hay $a=b=c$

Ví dụ 24. Cho $m, n > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n} \quad (2)$$

Giải

Ta có (2) $\Leftrightarrow n(m+n)a^2 + m(m+n)b^2 \geq mn(a+b)^2$

$$\Leftrightarrow mna^2 + n^2a^2 + m^2b^2 + mnb^2 \geq mna^2 + 2mnab + mnb^2$$

$$\Leftrightarrow n^2a^2 - 2mnab + m^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (na - mb)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức (2) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $na - mb = 0$ hay $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$

Chú ý

Bất đẳng thức (2) là một dạng đặc biệt của bất đẳng thức Schwarz sau đây :

Với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, ta có :

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$