

BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa :

Cho a, b là hai số thực. Các mệnh đề " $a > b$ ", " $a < b$ ", " $a \geq b$ ", " $a \leq b$ " được gọi là những *bất đẳng thức*.

- Chứng minh bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng (mệnh đề đúng)
- Với A, B là mệnh đề chứa biến thì " $A > B$ " là mệnh đề chứa biến. Chứng minh bất đẳng thức

$A > B$ (với điều kiện nào đó) nghĩa là chứng minh mệnh đề chứa biến " $A > B$ " đúng với tất cả các giá trị của biến (thỏa mãn điều kiện đó). Khi nói ta có bất đẳng thức $A > B$ mà không nêu điều kiện đối với các biến thì ta hiểu rằng bất đẳng thức đó xảy ra với mọi giá trị của biến là số thực.

2. Tính chất :

$$* a > b \text{ và } b > c \Rightarrow a > c$$

$$* a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$$

$$* a > b \text{ và } c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

$$* \text{ Nếu } c > 0 \text{ thì } a > b \Leftrightarrow ac > bc$$

$$\text{Nếu } c < 0 \text{ thì } a > b \Leftrightarrow ac < bc$$

$$* a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

$$* a \geq b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$$

$$* a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n$$

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

$$* -|a| \leq a \leq |a| \text{ với mọi số thực } a.$$

$$* |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \text{ (Với } a > 0 \text{)}$$

$$* |x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases} \text{ (Với } a > 0 \text{)}$$

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cauchy)

a) Đối với hai số không âm

Cho $a \geq 0, b \geq 0$, ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Hệ quả :

* Hai số dương có tổng không đổi thì tích lớn nhất khi hai số đó bằng nhau

* Hai số dương có tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau

b) Đối với ba số không âm

Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, ta có $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$