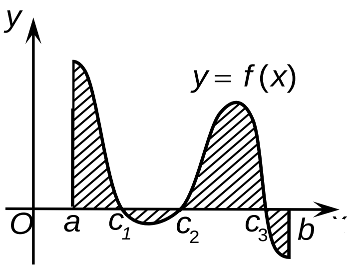
CHỦ ĐỀ: 4.3 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

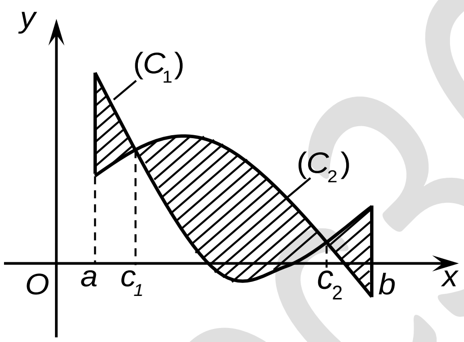
1. Diện tích hình phẳng

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $a;b$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $a;b$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx}$$

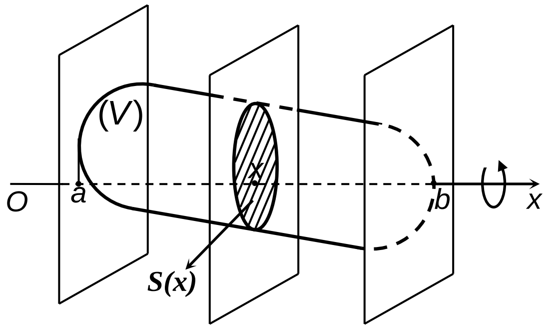
Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$
- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối
- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)|dy$

2. Thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay

a) Thể tích vật thể:

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại các điểm *a* và *b*; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

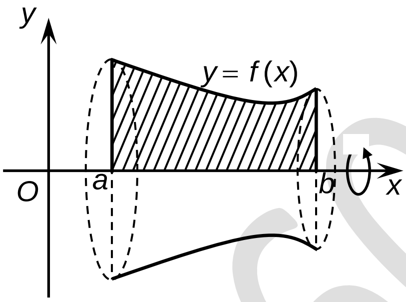


$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

Khi đó, thể tích của vật thể *B* được xác định: $V = \int_a^b S(x)dx$

b) Thể tích khối tròn xoay:

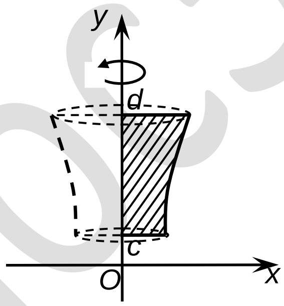
Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục *Ox*:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Chú ý:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục *Oy*:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2 dy}$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục *Ox*:

$$V = \pi\int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

I- Câu hỏi tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

Những điểm cần lưu ý:

Trường hợp 1. Cho hai hàm số *f*(*x*) và *g*(*x*) liên tục trên đoạn [*a*; *b*]. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b$ là $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$.

Phương pháp giải toán

+) Giải phương trình $f(x)=g(x)$ (1)

+) Nếu (1) vô nghiệm thì $S=\left|\int_a^b f(x)-g(x)\ dx\right|$.

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc . $a;b$. giả sử α thì

$$S=\left|\int_a^\alpha f(x)-g(x)\ dx\right|+\left|\int_\alpha^b f(x)-g(x)\ dx\right|$$

Chú ý: Có thể lập bảng xét dấu hàm số $f(x)-g(x)$ trên đoạn $a;\ b$ rồi dựa vào bảng xét dấu để tính tích phân.

Trường hợp 2. Cho hai hàm số *f*(*x*) và *g*(*x*) liên tục trên đoạn [*a*; *b*]. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x),\ y=g(x)$ là $S=\int_\alpha^\beta\left|f(x)-g(x)\right|dx$. Trong đó $\alpha,\ \beta$ là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x)=g(x)$ $a\le\alpha<\beta\le b$.

Phương pháp giải toán

Bước 1. Giải phương trình $f(x)=g(x)$ tìm các giá trị α,β.

Bước 2. Tính $S=\int_\alpha^\beta\left|f(x)-g(x)\right|dx$ như trường hợp 1.

Câu 1. Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $[a\ ;\ b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ là:

A. $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|.dx$.

B. $S=\int_a^b(f(x)-g(x))dx$.

C. $S=\int_a^b(f(x)-g(x))^2.dx$.

D. $S=\pi\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|.dx$.

Câu 2. Diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, liên tục trên $[a\ ;\ b]$ trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b\ (a<b)$ cho bởi công thức:

A. $S=\int_a^b |f(x)|dx.$ B. $S=\int_a^b f(x)\,dx.$ C. $S=\pi\int_a^b |f(x)|dx.$ D. $S=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3+11x-6,\ y=6x^2$, $x=0,\ x=2$. (*Đơn vị diện tích*)

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{18}{23}$

Hướng dẫn giải:

Đặt $h(x)=(x^3+11x-6)-6x^2=x^3-6x^2+11x-6$

$h(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2 \vee x=3$ (loại).

Bảng xét dấu

x	0		1		2
h(x)		-	0	+	0

$$S=-\int_0^1 (x^3-6x^2+11x-6)\,dx+\int_1^2 (x^3-6x^2+11x-6)\,dx$$

$$=-\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}.$$

Câu 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^3,\ y=4x$ là:

A. 8 B. 9 C. 12 D. 13

Hướng dẫn giải:

Ta có $x^3=4x \Leftrightarrow x=-2 \vee x=0 \vee x=2$

$$\Rightarrow S=\left|\int_{-2}^0 (x^3-4x)\,dx\right|+\left|\int_0^2 (x^3-4x)\,dx\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^0\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_0^2\right|=8.$$

Vậy $S=8$ (đvdt).

Chú ý: Nếu trong đoạn $\alpha;\ \beta$ phương trình $f(x)=g(x)$ không còn nghiệm nào nữa thì ta có thể dùng công thức $\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b f(x)dx.$ B. $S=-\int_a^b f(x)dx.$ C. $S=-\int_a^b f^2(x)dx.$ D. $S=\int_a^b f^2(x)dx.$

Hướng dẫn giải

Theo công thức **(SGK cơ bản)** ta có $S=\int_a^b f(x)dx.$

Câu 6. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b |f(x)|dx.$ B. $S=\int_a^b f(x)dx.$ C. $S=\int_a^b |f(x)|^2 dx.$ D. $S=\pi\int_a^b f(x)dx.$

Hướng dẫn giải

Theo công thức **(SGK cơ bản)** ta có $S=\int_a^b |f(x)|dx.$

Câu 7. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức

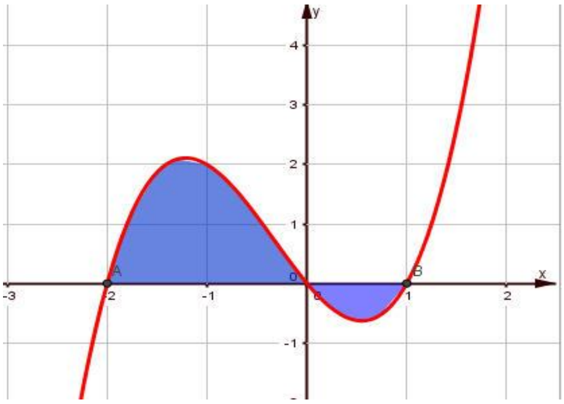
A. $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$ B. $S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx.$

C. $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx.$ D. $S=\pi\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx.$

Hướng dẫn giải

Theo công thức **(SGK cơ bản)** ta có $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình) là



A. $S = \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$

B. $S = \int_{-2}^{1} f(x)dx$

C. $S = \int_{0}^{-2} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$

D. $S = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$

Hướng dẫn giải

Theo định nghĩa ta có $S = \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$

Câu 9. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1,\ x = 3$ là

A. 20 B. 18 C. 19 D. 21

Hướng dẫn giải

Ta có $x^3 \geq 0$ trên đoạn $[1;3]$ nên $S = \int_{1}^{3} \left|x^3\right| dx = \int_{1}^{3} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 = 20$

Câu 10. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1,\ x = 4$ là

A. $\frac{14}{3}$ B. $\frac{14}{5}$ C. $\frac{13}{3}$ D. 4

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{x} \geq 0$ trên đoạn $[1;4]$ nên $S = \int_{1}^{4} \left|\sqrt{x}\right| dx = \int_{1}^{4} \sqrt{x} dx = \left.\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \frac{14}{3}$

Câu 11. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1,\ x = 8$ là

A. $\frac{45}{4}$ B. $\frac{45}{2}$ C. $\frac{45}{7}$ D. $\frac{45}{8}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt[3]{x} \geq 0$ trên đoạn $[1;8]$ nên $S = \int_1^8 \left|\sqrt[3]{x}\right| dx = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_1^8 = \frac{45}{4}$

Câu 12. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$ là

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin x \leq 0$ trên đoạn $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ nên $S = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx = -\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx = \cos x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = 1$

Câu 13. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \tan x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$ là

A. $-\ln\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\ln\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\ln\frac{\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\tan x \geq 0$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ nên

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan x| dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\ln(\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Câu 14. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là

A. $\frac{e^6}{2} - \frac{1}{2}$ B. $\frac{e^6}{2} + \frac{1}{2}$ C. $\frac{e^6}{3} + \frac{1}{3}$ D. $\frac{e^6}{3} - \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có $e^{2x} \geq 0$ trên đoạn $[0;3]$ nên $S = \int_0^3 \left|e^{2x}\right| dx = \int_0^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^3 = \frac{e^6}{2} - \frac{1}{2}$

[DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG]

VẬN DỤNG THẤP

Câu 15. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,\ x=4$ là

A. $\frac{51}{4}$ B. $\frac{53}{4}$ C. $\frac{49}{4}$ D. $\frac{25}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x=3\in[1;4]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int_1^4\left|x^3-3x^2\right|dx=\left|\int_1^3(x^3-3x^2)dx\right|+\left|\int_3^4(x^3-3x^2)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Big|_1^3\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Big|_3^4\right|=6+\frac{27}{4}=\frac{51}{4}$$

Câu 16. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=3$ là

A. $\frac{144}{5}$ B. $\frac{143}{5}$ C. $\frac{142}{5}$ D. $\frac{141}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2\in[0;3]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int_0^3\left|x^4-3x^2-4\right|dx=\left|\int_0^2(x^4-3x^2-4)dx\right|+\left|\int_2^3(x^4-3x^2-4)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_0^2\right|+\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_2^3\right|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}$$

Câu 17. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x=2$ là

A. $3-2\ln 2$ B. $3-\ln 2$ C. $3+2\ln 2$ D. $3+\ln 2$

Hướng dẫn giải

Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ nên

$$S=\int_{-1}^{2}\left|\frac{x+1}{x+2}\right|dx=\left|\int_{-1}^{2}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)dx\right|=\left|\left(x-\ln|x+2|\right)\Big|_{-1}^{2}\right|=3-2\ln 2$$

Câu 18. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y=2-x^2$ và đường thẳng $y=-x$ là

A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $2-x^2=-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ và $2-x^2 \ge -x, \forall x \in [-1;2]$

Nên $S=\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx=\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$

Câu 19. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$ là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Nên $S=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x|\,dx=\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx\right|=\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|=1$

Câu 1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ là

A. $\frac{72}{5}$ B. $\frac{73}{5}$ C. $\frac{71}{5}$ D. 14

Hướng dẫn giải

Ta có $x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2 \in [0;3]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int_0^3\left|x^4-3x^2-4\right|dx=\left|\int_0^2(x^4-3x^2-4)dx\right|+\left|\int_2^3(x^4-3x^2-4)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_0^2\right|+\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_2^3\right|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}$$

Câu 2. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng
$x=2$ là

A. $3-2\ln 2$ B. $3-\ln 2$ C. $3+2\ln 2$ D. $3+\ln 2$

Hướng dẫn giải

Ta có $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ nên

$$S=\int_{-1}^2\left|\frac{x+1}{x+2}\right|dx=\left|\int_{-1}^2\left(1-\frac{1}{x+2}\right)dx\right|=\left|\ x-\ln|x+2|\ \Big|_{-1}^2\right|=3-2\ln 2$$

Câu 3. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y=2-x^2$ và đường thẳng $y=-x$ là

A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $2-x^2=-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$ và $2-x^2\ge -x,\forall x\in[-1;2]$

Nên $S=\int_{-1}^2(2+x-x^2)dx=\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^2=\frac{9}{2}$

Câu 4. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,x=\frac{\pi}{2}$ là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0;\frac{\pi}{2}]$

Nên

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x| dx = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \right| = \left| \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right| = 1$$

Câu 5. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$ là

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{13}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{1}{15}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$

Nên

$$S = \int_0^1 \left| \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \right| dx = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) dx \right| = \left| \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{1}{12}$$

Câu 6. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ và $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ là

A. $\frac{37}{12}$ B. $\frac{37}{13}$ C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải

Ta có $2x^3 - 3x^2 + 1 = x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$

Nên

$$S = \int_{-2}^1 \left| x^3 + x^2 - 2x \right| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{37}{12}$$

Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4$, đường thẳng $x=3$, trục tung và trục hoành là

A. $\frac{23}{3}$ B. $\frac{32}{3}$ C. $\frac{25}{3}$ D. $\frac{22}{3}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $-x^2+4=0$ trên đoạn $0;3$ có nghiệm $x=2$

Suy ra $S=\int\limits_0^2\left|-x^2+4\right|dx+\int\limits_2^3\left|-x^2+4\right|dx=\frac{23}{3}$

Câu 8. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3-4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3,\ x=4$ là

A. $\frac{201}{4}$ B. $\frac{203}{4}$ C. $\frac{201}{5}$ D. $\frac{202}{3}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $x^3-4x=0$ trên đoạn $-3;4$ có nghiệm $x=-2;\ x=0;\ x=2$

Suy ra $S=\int\limits_{-3}^{-2}\left|x^3-4x\right|dx+\int\limits_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|dx+\int\limits_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|dx+\int\limits_{2}^{4}\left|x^3-4x\right|dx=\frac{201}{4}$

Câu 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là

. A. $\frac{e^2+1}{4}$ B. $\frac{e^2+1}{2}$ C. $\frac{e^2-1}{4}$ D. $\frac{e^2-1}{2}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $x\ln x=0$ trên nữa khoảng $0;e$ có nghiệm $x=1$

Suy ra $S=\int\limits_1^e x\ln x dx=\frac{e^2+1}{4}$

Câu 10. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=x^2+x-2,\ y=x+2$ và hai đường thẳng $x=-2;\ x=3$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{87}{3}$ B. $\frac{87}{4}$ C. $\frac{87}{5}$ D. $\frac{87}{5}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $(x^2+x-2)-(x+2)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Suy ra $S = \int_{-2}^{2} \left|x^2 - 4\right| dx + \int_{2}^{3} \left|x^2 - 4\right| dx = \dfrac{87}{3}$

Câu 11. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = \ 1+e^x \ \ x, \ y = \ 1+e \ \ x$. Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{e-2}{2}$ B. $\dfrac{e-1}{2}$ C. $\dfrac{e-2}{2}$ D. $\dfrac{e+1}{2}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $\ 1+e^x \ \ x - \ 1+e \ \ x = 0$ có nghiệm $x = 0, \ x = 1$

Suy ra $S = \int_0^1 \left|x \ \ e - e^x \ \right| dx = \int_0^1 x \ \ e - e^x \ \ dx = \dfrac{e-2}{2}$

VẬN DỤNG CẤP ĐỘ CAO

Câu 31. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-1\right|,\ y=\left|x\right|+5$.
Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{73}{3}$ B. $\frac{71}{3}$ C. $\frac{70}{3}$ D. $\frac{74}{3}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $\left|x^2-1\right|=\left|x\right|+5$ có nghiệm $x=-3,\ x=3$

Suy ra $S=\int_{-3}^{3}\left|\left|x^2-1\right|-\left(\left|x\right|+5\right)\right|dx=2\int_{0}^{3}\left|\left|x^2-1\right|-\left(x+5\right)\right|dx$

Bảng xét dấu x^2-1 trên đoạn $[0;3]$

x	0	1	3
x^2-1	-	0	+

Vậy $S=2\left|\int_{0}^{1}\left(-x^2-x-4\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x^2-x-6\right)dx\right|=\frac{73}{3}$

Câu 32. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|,\ y=x+3$.
Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{109}{6}$ B. $\frac{109}{5}$ C. $\frac{108}{5}$ D. $\frac{119}{6}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $\left|x^2-4x+3\right|=x+3$ có nghiệm $x=0,\ x=5$

Suy ra $S=\int_{0}^{1}\left(-x^2+5x\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x^2-3x+6\right)dx+\int_{3}^{5}\left(-x^2+5x\right)dx=\frac{109}{6}$

Câu 33. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=x^2+3$, tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ $x=2$ và trục tung bằng

A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. $\frac{7}{3}$

Hướng dẫn giải

PTTT của (P) tại $x=2$ là $y=4x+3$

Xét pt $x^2+3 \;-\; 4x+3 \; = 0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Suy ra $S=\int\limits_0^2 \left| \; x^2-4x+4 \; \right| dx = \left| \int\limits_0^2 \; x^2-4x+4 \; dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2+4x \right) \Big|_0^2 \right| = \frac{8}{3}$

Câu 34. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2-2y+x=0,\; x+y=0$ là

A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

Hướng dẫn giải

Biến đổi về hàm số theo biến số y là $x=-y^2+2y,\; x=-y$

Xét pt tung độ giao điểm $(-y^2+2y)- \;\; -y \;\; =0$ có nghiệm $y=0,\; y=3$

Vậy $S=\int\limits_0^3 \left|-y^2+3y\right| dy = \int\limits_0^3 \; -y^2+3y \; dy = \frac{9}{2}$

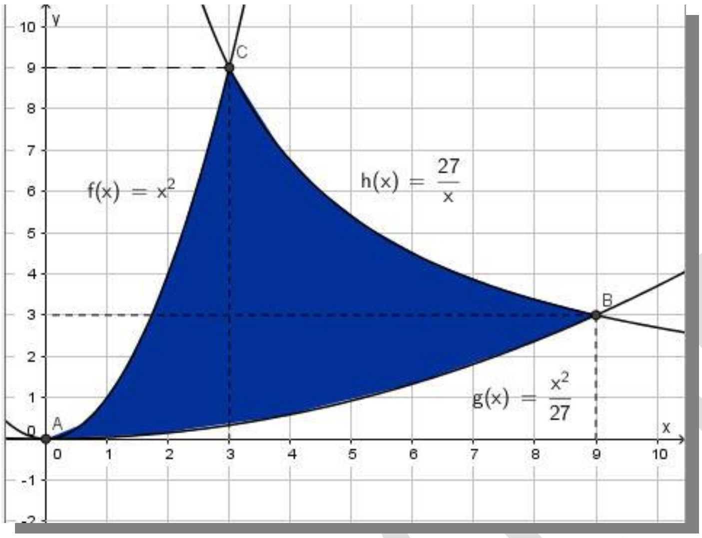
Câu 35. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2;\; y=\frac{1}{27}x^2;\; y=\frac{27}{x}$ bằng

A. $27\ln 3$ B. $27\ln 2$ C. $28\ln 3$ D. $29\ln 3$

Hướng dẫn giải

Xét các pthđgđ

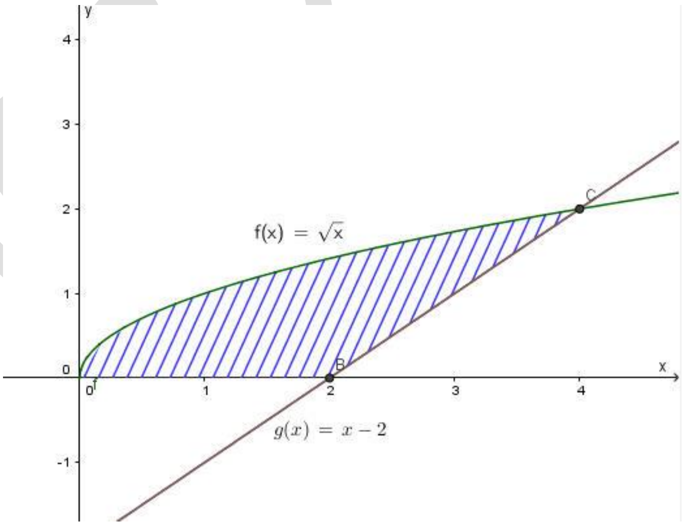
$$x^2 - \frac{x^2}{27} = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$x^2 - \frac{27}{x} = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$\frac{x^2}{27} - \frac{27}{x} = 0 \Rightarrow x = 9$$



Suy ra

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{27}\right)dx + \int_3^9 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27}\right)dx = 27\ln 3$$

Câu 36. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là



A. $\frac{10}{3}$ B. $\frac{11}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có $y^2 = y+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=2 \end{array}\right.$

Nên $S = \int_0^2 (y+2-y^2)dy = \frac{10}{3}$

Câu 37. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x, y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 67 B. 68 C. 66 D. 65

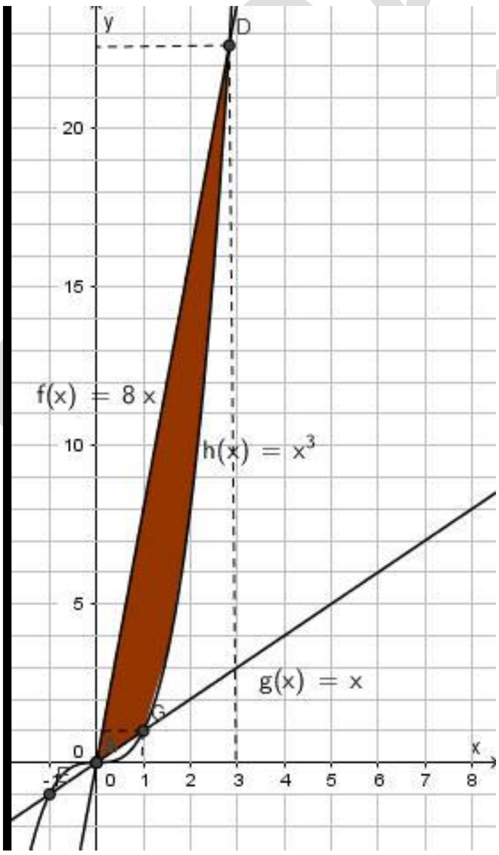
Hướng dẫn giải

Ta có

$8x - x = 0 \Rightarrow x = 0$

$8x - x^3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\sqrt{2} \end{array}\right.$

$x - x^3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$



Nên $S = \int_0^1 8x - x\ dx + \int_1^{2\sqrt{2}} 8x - x^3\ dx = \dfrac{63}{4}$

Câu 38. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1, y = x$ và đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{4}$ trong miền $x \ge 0, y \le 1$ là $\dfrac{a}{b}$. Khi đó $b - a$ bằng

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

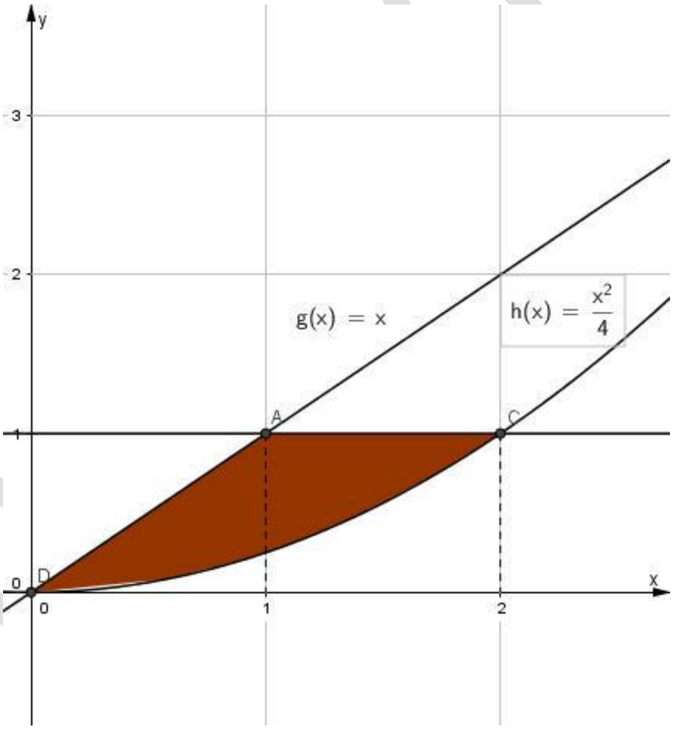
Hướng dẫn giải

Ta có

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x - \dfrac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 0$

$1 - \dfrac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 2$



Nên $S = \int_0^1 \left(x - \dfrac{x^2}{4} \right) dx + \int_1^2 \left(1 - \dfrac{x^2}{4} \right) dx = \dfrac{5}{6}$

Câu 39. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=\begin{cases}-x, & \text{nÕu x} \le 1\\ x-2, & \text{nÕu x>1}\end{cases}$ và $y=\frac{10}{3}x-x^2$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $a+2b$ bằng

A. 17 B. 15 C. 16 D. 18

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có

$\frac{10}{3}x-x^2=-x\Rightarrow x=0$

$\frac{10}{3}x-x^2=x-2\Rightarrow x=3$

Nên $S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)dx+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)dx=\frac{13}{2}$

Câu 40.Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C):y=\frac{-x^2+4x-4}{x-1}$, tiệm cận xiêm của (C) và hai đường thẳng $x=0,x=a\ (a<0)$ có diện tích bằng 5 Khi đó a bằng

A. $1-e^5$ B. $1+e^5$ C. $1+2e^5$ D. $1-2e^5$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có

$TCX: y=-x+3$

Nên $S(a)=\int_a^0\left(-\frac{1}{x-1}\right)dx=\int_0^a\left(\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln|x-1|\Big|_0^a=\ln(1-a)$

Suy ra $\ln(1-a)=5\Leftrightarrow a=1-e^5$

II-Câu hỏi tính tính thể tích vật tròn xoay giới hạn bởi các đường:

Những điểm cần lưu ý:

. Tính thể tích khối tròn xoay:

Trường hợp 1. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$ ***quay quanh trục Ox*** là $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Trường hợp 2. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$ ***quay quanh trục Ox*** là $V = \pi\int_a^b |f^2(x) - g^2(x)|dx$.

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{4}{x}, y = 0, x = 1, x = 4$ quanh trục ox là:

A. 12π B. 6π C. 6π D. 6π

Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \int_1^4 \pi.(\frac{4}{x})^2 dx = 12\pi$.

Câu 2. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos 4x$, Ox, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{8}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{\pi^2}{16}$ B. $\frac{\pi^2}{2}$

C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\left(\frac{\pi+1}{16}\right).\pi$

Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \pi.\cos^2 4x dx = \frac{\pi^2}{16}$.

Câu 3. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, Ox, $x = a$, $x = b$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

B. $V = \pi^2 \int_a^b f(x)dx.$

C. $V = \int_a^b \pi^2.f^2(x)dx.$

D. $V = \int_a^b f^2(x)dx.$

Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$

Câu 4. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$; trục *Ox* và đường thẳng $x = 3$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 2π B. 3π C. $\frac{3}{2}\pi$ D. π

Giao điểm của hai đường $y = \sqrt{x-1}$ và $y = 0$ là $A(1;0)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \pi \int_1^3 (x-1)dx = 2\pi.$

Câu 5. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 1,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{23\pi}{14}$ B. $\frac{79\pi}{63}$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. 9π

Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \pi \int_0^1 (x^3+1)^2 dx = \frac{23\pi}{14}.$

Câu 6. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = x,\ x = a,\ x = b\ (0 < a < b)$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V = \pi \int_a^b x dx.$ B. $V = \pi \int_a^b \sqrt{x} dx.$

C. $V = \pi^2 \int_a^b x dx.$ D. $V = \pi^2 \int_a^b \sqrt{x} dx.$

Hướng dẫn giải

Với $x \in [a;b]$ thì $y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$.

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_a^b xdx.$

Câu 7. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=-x^2+2x,\ y=0$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{16\pi}{15}$

B. $\frac{4\pi}{3}$

C. $\frac{64\pi}{15}$

D. $\frac{496\pi}{15}$

Hướng dẫn giải

Giao điểm của hai đường $y^2=-x^2+2x$ và $y=0$ là $O(0;0)$ và $A(2;0)$. Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_0^2(-x^2+2x)^2dx=\frac{16\pi}{15}.$

Câu 8. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{1-x^2},\ y=0$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{4}{3}\pi$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{3\pi}{2}$

Hướng dẫn giải

Giao điểm của hai đường $y=\sqrt{1-x^2}$ và $y=0$ là $B(-1;0)$ và $A(1;0)$. Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4\pi}{3}.$

Câu 9. Thể tích khối tròn xoay trong không gian Oxyz giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0;\ x=\pi$ và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm $(x;0;0)$ bất kỳ là đường tròn bán kính $\sqrt{\sin x}$ là:

A. $V=2\pi.$

B. $V=\pi.$

C. $V=4\pi.$

D. $V=2.$

Hướng dẫn giải

Khối tròn xoay trong đề bài có được bằng cách quay hình phẳng tạo bởi các đường $x=0;\ x=\pi;\ y=\sqrt{\sin x};\ Ox$ quay trục Ox.

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_0^{\pi}\sin x dx=2\pi.$

Câu 10. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{3}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V = \pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ B. $V = \pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

C. $V = \pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ D. $V = \pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx = \pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Câu 11. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 + \sqrt{x},\ Ox,\ x = 0,\ x = 4$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\pi.\frac{68}{3}$ B. $\pi^2\frac{28}{3}$ C. $\pi\frac{28}{3}$ D. $\pi^2.\frac{68}{3}$

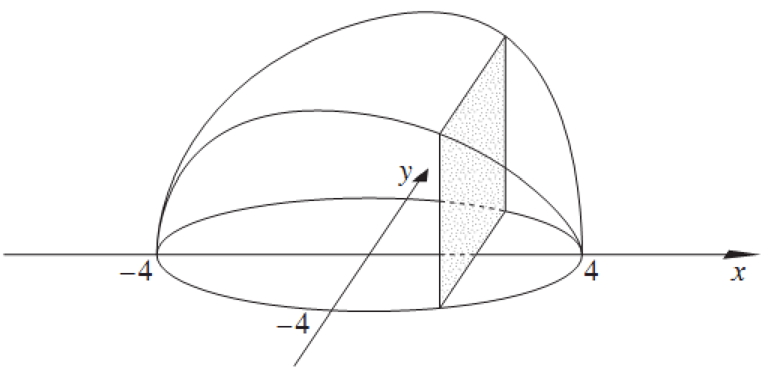
Hướng dẫn giải

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \int_0^4 \pi.(1 + \sqrt{x})^2 dx = \frac{68\pi}{3}.$$

VẬN DỤNG

Câu 12. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$ (nằm trong mặt phẳng Oxy), cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là hình vuông. Thể tích của vật thể là:



A. $\int_{-4}^{4} 4\left(16-x^2\right)dx$ B. $\int_{-4}^{4} 4x^2dx$ C. $\int_{-4}^{4} 4\pi x^2dx$ D. $\int_{-4}^{4} 4\pi\left(16-x^2\right)dx$

Hướng dẫn giải

Thiết diện cắt trục Ox tại điểm H có hoành độ bằng x thì cạnh của thiết diện bằng $2.\sqrt{16-x^2}$. Vậy thể tích của vật thể bằng $V=\int_{-4}^{4} S(x)dx=\int_{-4}^{4} 4\left(16-x^2\right)dx.$

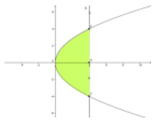
Câu 13. Cho hình phẳng *D* giới hạn bởi các đường $y^2=4x$ và đường thẳng $x=4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi *D* xoay quanh trục *Ox* là:

A. 32π B. 64π C. 16π D. 4π

Hướng dẫn giải

Giao điểm của hai đường $y^2=4x$ và $x=4$ là $D(4;-4)$ và $E(4;4)$. Phần phía trên Ox của đường $y^2=4x$ có phương trình $y=2\sqrt{x}$. Từ hình vẽ suy ra thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V=\int_0^4 \pi.(2\sqrt{x})^2dx=32\pi.$$



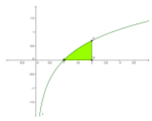
Câu 14. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\ln x,\ y=0,\ x=2$ quay xung quanh trục *Ox.* Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\pi\left(2\ln^2 2-4\ln 2+2\right)$

B. $\pi\left(2\ln^2 2+4\ln 2-2\right)$

C. $2\ln^2 2-4\ln 2+2$

D. $\pi\left(2\ln 2-1\right)$

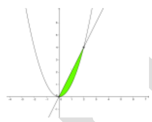


Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của hai đường $y=\ln x$ và $y=0$ là điểm $C(1;0)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int_1^2 \pi.\ln^2 x dx=\pi\left(2\ln^2 2-4\ln 2+2\right)$.

Câu 20. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=a.x^2$, $y=bx$ $(a,b\neq 0)$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\pi.\frac{b^5}{a^3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$



B. $V=\pi.\frac{b^5}{5a^3}$

C. $V=\pi.\frac{b^5}{3a^3}$

D. $V=\pi.\frac{b^3}{a^3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của hai đường $y=ax^2$ và $y=bx$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(\frac{b}{a};\frac{b^2}{a})$.

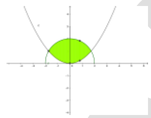
Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int_0^{\frac{b}{a}} \pi.b^2x^2dx-\int_0^{\frac{b}{a}} \pi.a^2x^4dx=\pi.\frac{b^5}{a^3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$.

Câu 21. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\frac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$

B. $V=\frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$

C. $V=\frac{28\pi\sqrt{2}}{5}$



D. $V=\frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của hai đường $y=\sqrt{4-x^2}$ và $y=\frac{1}{3}x^2$ là các điểm $A(-\sqrt{3};1)$ và $B(\sqrt{3};1)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi.(4-x^2)dx-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi.\frac{1}{9}x^4dx=\pi.\frac{28\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 22. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3x,\ y=x,\ x=0,\ x=1$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\frac{8\pi}{3}$.

B. $V=\frac{4\pi}{3}$.

C. $V=\frac{2\pi}{3}$.

D. $V=\pi$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của đường $x=1$ với $y=x$ và $y=3x$ là các điểm $C(1;1)$ và $B(3;1)$. Tọa độ giao điểm của đường $y=3x$ với $y=x$ là $O(0;0)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V=\int_0^1\pi.9x^2dx-\int_0^1\pi.x^2dx=\pi.\frac{8}{3}.$$

Câu 23. Gọi (H) là hình phẳng được tạo bởi hai đường cong $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, $a < b$. Giả sử rằng (C_1) và (C_2) không có điểm chung trên $[a,b]$ và thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay (H) quanh Ox là $V = \pi\int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$. Khi đó

(1): $f(x) > g(x), \forall x \in [a,b]$

(2): $f(x) > g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$

(3): $0 \leq f(x) < g(x), \forall x \in [a,b]$

Số nhận định đúng trong các nhận định trên là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

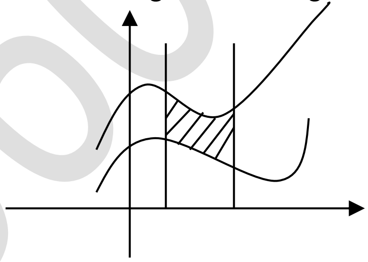
Hướng dẫn giải

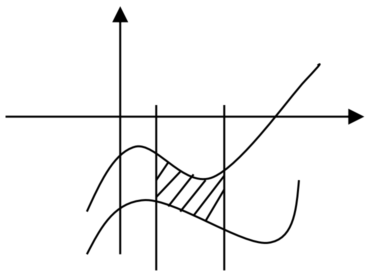
Từ giả thiết ta suy ra có thể xảy ra một trong hai trường hợp:

(2): $f(x) > g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$

hoặc (3): $0 \leq f(x) < g(x), \forall x \in [a,b]$.

Do đó số nhận định đúng là không.





Câu 24. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x.\sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $x = e$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\pi.\frac{2e^3+1}{9}$ B. $\pi.\frac{4e^3-1}{9}$

C. $\pi.\frac{4e^3+1}{9}$ D. $\pi.\frac{2e^3-1}{9}$

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của đường $x=e$ với $y=x\sqrt{\ln x}$ là điểm $C(3;3)$. Tọa độ giao điểm của đường $y=x\sqrt{\ln x}$ với $y=0$ là $A(1;0)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V=\int_1^e \pi.x^2\ln x dx=\pi.\frac{2e^3+1}{9}.$$

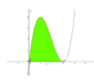
Câu 25. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3-6x^2+9x,\ y=0$ quay xung quanh trục *Ox.* Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{729\pi}{35}$ B. $\frac{27\pi}{4}$ C. $\frac{256608\pi}{35}$ D. $\frac{7776\pi}{5}$

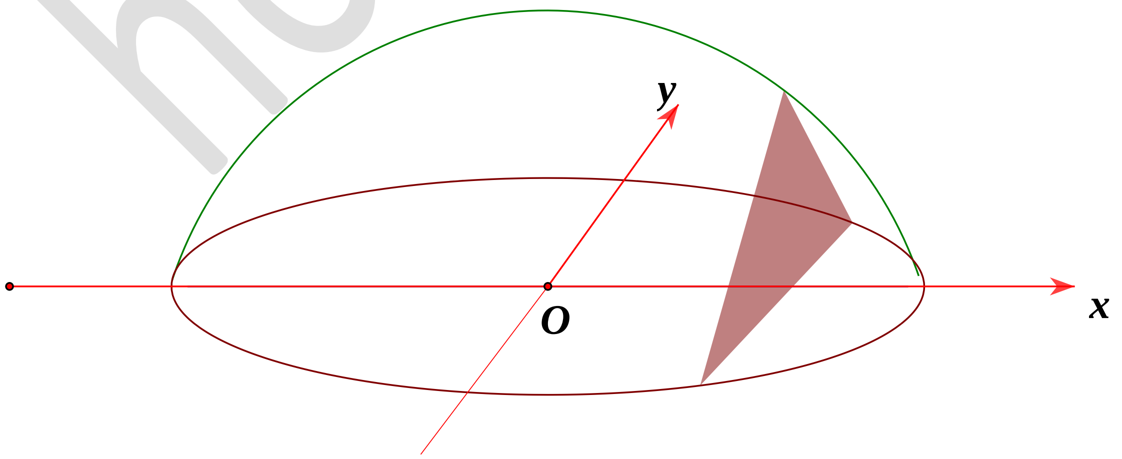
Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của đường $y=x^3-6x^2+9x$ với $y=0$ là các điểm $C(e;e)$ và $A(3;0)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V=\int_0^3 \pi.\left(x^3-6x^2+9x\right)^2 dx=\pi.\frac{729}{35}.$$



Câu 26. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=16$ (nằm trong mặt phẳng Oxy), cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V=\dfrac{256\sqrt{3}}{3}$.   B. $V=\dfrac{256}{3}$.

C. $V=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$.   D. $V=\dfrac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải

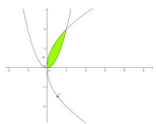
Giao điểm của thiết diện và *Ox* là H. Đặt $OH=x$ suy ra cạnh của thiết diện là $2\sqrt{16-x^2}$. Diện tích thiết diện tại H là $S(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}4(16-x^2)$. Vậy thể tích của vật thể là $V=\int\limits_{-4}^{4}\sqrt{3}(16-x^2)dx=\dfrac{256\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y^2=4x$ quay xung quanh trục *Ox.* Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\dfrac{6\pi}{5}$.   B. $V=\dfrac{9\pi}{70}$.

C. $V=\dfrac{4\pi}{3}$.   D. $V=\dfrac{88\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải



Với $x\in\left[0;2\right]$ thì $y^2=4x\Leftrightarrow y=\sqrt{4x}$

Tọa độ giao điểm của đường $y=2x^2$ với $y^2=4x$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(1;2)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int\limits_0^1\pi.4xdx-\int\limits_0^1\pi.4x^4dx=\pi.\dfrac{6}{5}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

(Chỉ có phần đáp số)

.Câu 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $\mathbf{ax=y^2;\ ay=x^2}$ (a > 0 cho trước) là:

A. $S=\dfrac{a^2}{3}$ B. $S=\dfrac{a^2}{2}$

C. $S=\dfrac{2}{3}a^2$ D. $S=\dfrac{4}{3}a^2$

Câu 2 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của: $y = x^2 - 2x$, trục Ox và 2 đường thẳng

x = 0, x = 2 là:

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 0

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol $y = -x^2$ và đường thẳng y = -x - 2

A. $\frac{11}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$ D.

Câu 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi ba đường: y = sinx, y = cosx và x = 0

A. $2\sqrt{2} - 1$ B. $2\sqrt{2} + 1$

C. $\sqrt{2}$ D.

Câu 5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol: $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$ là:

A. 8 B. 7 C. 9 D. 6.

Câu 6. Diện tích giới hạn bởi 2 đường cong:

$(C_1): y = f_1(x) = x^2 + 1$; $(C_2): y = f_2(x) = x^2 - 2x$ và đường thẳng x = -1 và x = 2.

A. $\frac{13}{2}$ B. $\frac{11}{2}$ C. 7 D. $-\frac{11}{2}$

Câu 7 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol: $y = x^2 - 2x + 2$ tiếp tuyến với parabol tại điểm M(3 ; 5) và trục tung

A. 6 B. 7 C. 5 D. 9

Câu 8. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi: y = lnx, y = 0, x = e là:

A. 1 B. 2 C. 4 D. Một kết quả khác

Câu 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: y = x(x – 1)(x – 2), y = 0

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 1.

Câu 10. Cho D là miền kín giới hạn bởi các đường y = 1, y = 2 – x và x = 0. Tính diện tích của miền D

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 1 D. $\frac{1}{8}$

Câu 11. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: y = cosx , y = 0, x=0, $x=\frac{\pi}{2}$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{3}{2}$

Câu 12 Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi: $y=2x-x^2, y=0$ quay quanh Ox.

A. $\frac{17\pi}{15}$ B. $\frac{16\pi}{15}$ C. $\frac{14\pi}{15}$ D. $\frac{13\pi}{15}$

Câu 13. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y=x^2, 8x=y^2$ quay quanh trục Oy là:

A. $\frac{21\pi}{5}$ B. $\frac{23\pi}{5}$ C. $\frac{24\pi}{5}$ D. $\frac{48\pi}{5}$

Câu 14. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và Parabol $(C): y=ax-x^2\ (a>0)$ là:

A. $\frac{\pi a^5}{10}$ B. $\frac{\pi a^5}{20}$ C. $\frac{\pi a^4}{5}$ D. $\frac{\pi a^5}{30}$

Câu 15 . Thể tích khối tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục Ox, hình phẳng S giới hạn bởi các đường: $y=x.e^x, x=1, y=0\ (0\le x\le 1)$ là:

A. $\frac{\pi(e^2-1)}{4}$ B. $\frac{\pi(e^2+1)}{4}$ C. $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$ D. $-\frac{\pi\ e^2-1}{4}$