# CHỦ ĐỀ: TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

## PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

### A.TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA.

### I. Tọa độ trong không gian

**1) Hệ trục tọa độ trong không gian** $Oxyz$

- Hệ gồm ba trục $Ox, Oy, Oz$ đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian.
- Điểm $O$ gọi là gốc của hệ tọa độ, trục $Ox$ là trục hoành, $Oy$ là trục tung và $Oz$ là trục cao.
- Véctơ đơn vị trên các trục $Ox, Oy, Oz$ lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ta có:

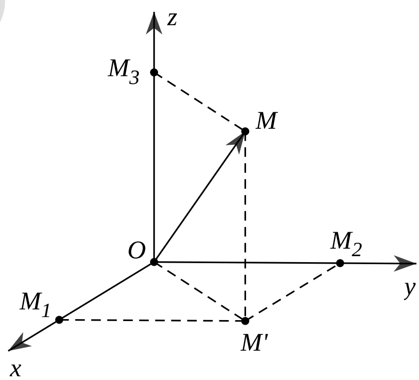
$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1, \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

- Xét điểm $M$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ thì $M(x; y; z)$.

Ngược lại, điểm $M(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

- Với véctơ $\vec{u}$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ luôn tồn tại duy nhất bộ $(x; y; z)$ thỏa: $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

Tọa độ $\vec{u}$ là $(x; y; z)$.




**2) Tọa độ véc tơ – Tọa độ điểm**

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ và số thực $k$. Khi đó

* $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$ * $k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$

$$* \ \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}.$$

hoc360.net

***Chú ý***: Nếu $x_2 = 0$ $(y_2 = 0, z_2 = 0)$ thì $x_1 = 0$ $(y_1 = 0, z_1 = 0)$

* $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

* $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

* $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

* $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

Cho $A = (x_A; y_A; z_A)$, $B = (x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, $D(x_D; y_D; z_D)$.
Khi đó:

* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

* $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

* Trung điểm I của đoạn AB: $I = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

* Trọng tâm G của $\Delta ABC$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

* Trọng tâm G của tứ diện ABCD:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

**3) Tích có hướng của hai véc tơ và ứng dụng**

**a) Định nghĩa:** Cho $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ và $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

**b) Các tính chất:**

* $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$

* $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{a}$ và $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{b}$

* $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin(\vec{a}, \vec{b})$

**c) Các ứng dụng của tích có hướng**

- Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.

- Thể tích:

  * **Hình hộp:** $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

  * **Tứ diện:** $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

**Điều kiện 3 véctơ đồng phẳng:**

  * $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$

  * $A, B, C, D$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 0$.

**3. Phương trình mặt cầu.**

Mặt cầu $(S)$ tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R$ có phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1).$$

Phương trình (1) có thể được biểu diễn cách khác như sau

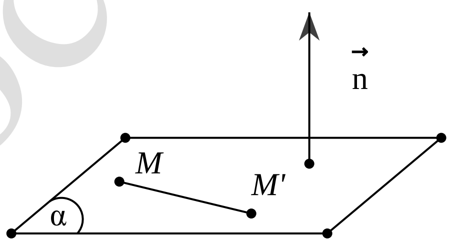
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (2)$$

Với $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$.

**II. Phương trình mặt phẳng**

**1. Véc tơ pháp tuyến:**

**Định nghĩa**: Cho mặt phẳng $(\alpha)$. Véc tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là véc tơ pháp tuyến (VTPT) của mp $(\alpha)$ nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với $(\alpha)$, kí hiệu $\vec{n} \perp (\alpha)$.




***Chú ý:***

*Nếu $\vec{n}$ là VTPT của (α) thì $k.\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTPT của $(\alpha)$. Vậy mp$(\alpha)$ có vô số VTPT.

 * Nếu hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ (không cùng phương) có giá song song (hoặc nằm trên) $(\alpha)$ thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một VTPT của mp$(\alpha)$.

* Nếu ba điểm $A, B, C$ phân biệt không thẳng hàng thì véc tơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ là một VTPT của $mp\left(ABC\right)$.

**2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng:**

* Cho $mp(\alpha)$ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$, có $\vec{n} = (A; B; C)$ là một VTPT . Khi đó phương trình tổng quát của $(\alpha)$ có dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

* Nếu $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một VTPT của $(\alpha)$.

* Nếu $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ ; $abc \neq 0$ thì phương trình của $(ABC)$ có dạng:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và được gọi là phương trình theo đoạn chắn của $(\alpha)$.

**3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng :**

Cho hai mp $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

* $(P)$ cắt $(Q) \Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$.

$*(P) // (Q) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

$(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

**4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:**

Khoảng cách từ $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ đến mp $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ là:

$$d(M, (P)) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**III. Phương trình đường thẳng trong không gian**

**1. Phương trình tham số của đường thẳng:**

**a) Véc tơ chỉ phương của đường thẳng**:

Cho đường thẳng $\Delta$. Véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là véc tơ chỉ phương(VTCP) của đường thẳng $\Delta$ nếu giá của nó song song hoặc trùng với $\Delta$.

**Chú ý 1.3.3:**

* Nếu $\vec{u}$ là VTCP của $\Delta$ thì $k.\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTCP của $\Delta$

* Nếu đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A, B$ thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP

* Nếu $\Delta$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ thì $\left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right] = \overrightarrow{u_\Delta}$ là một VTCP của $\Delta$ (Trong đó $\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}$ lần lượt là VTPT của $(P)$ và $(Q)$).

**b) Phương trình tham số của đường thẳng**

Cho đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$. Khi đó phương trình đường thẳng $\Delta$ có dạng: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$

(1) gọi là phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$, $t$ gọi là tham số.

**Chú ý .** Cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình (1)

* $\vec{u} = (a; b; c)$ là một VTCP của $\Delta$

* $M \in \Delta \Leftrightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

**2. Phương trình chính tắc:**

Cho đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ với $abc \neq 0$. Khi đó phương trình đường thẳng $\Delta$ có dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (2)$$

(2) gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta$.

**3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng**

Cho hai đường thẳng $d : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ có VTCP

$\overrightarrow{u_d} = (a; b; c)$ và $d' : \dfrac{x - x'_0}{a'} = \dfrac{y - y'_0}{b'} = \dfrac{z - z'_0}{c'}$ đi qua $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$ có VTCP $\overrightarrow{u_{d'}} = (a'; b'; c')$.

* Nếu $[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}}]\overrightarrow{MM'} = 0 \Rightarrow d$ vaø $d'$ đồng phẳng. Khi đó xảy ra ba trường hợp

$i)$ $d$ và $d'$ cắt nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u'}] \neq \vec{0}$ và tọa độ gia điểm là nghiệm của hệ :

hoc360.net

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} \\ \dfrac{x-x'_0}{a'} = \dfrac{y-y'_0}{b'} = \dfrac{z-z'_0}{c'} \end{cases}.$$

$ii)\ \ d//d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{u'}] = \vec{0} \\ [\vec{u},\overrightarrow{MM'}] \neq \vec{0} \end{cases}$

$iii)\ d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{u'}] = \vec{0} \\ [\vec{u},\overrightarrow{MM'}] = \vec{0} \end{cases}$

* Nếu $[\vec{u},\vec{u'}]\overrightarrow{MM'} \neq 0 \Rightarrow$ $d$ và $d'$ chéo nhau .

**4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng**

Cho $mp(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có $\vec{n}=(A;B;C)$ là VTPT và đường thẳng

$\Delta: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ có $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP và đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

- $\Delta$ cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}$ và $\vec{u}$ không cùng phương $\Leftrightarrow Aa+Bb+Cc \neq 0$. Khi đó

tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ : $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 & (a) \\ \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} & (b) \end{cases}$

Từ $(b) \Rightarrow x = x_0+at, y = y_0+bt, z = z_0+ct$ thế vào $(a) \Rightarrow t \Rightarrow$ giao điểm

* $\Delta//(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa+Bb+Cc=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0 \end{cases}$

* $\Delta \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa+Bb+Cc=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D = 0 \end{cases}$

* $\Delta \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}$ vaø $\vec{u}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{n} = k.\vec{u}$.

**5. Khoảng cách**

**a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:**

Cho đường thẳng $\Delta$ đi qua $M_0$, có VTCP $\vec{u}$ và điểm $M \notin \Delta$. Khi đó để tính khoảng cách từ $M$ đến $\Delta$ ta có các cách sau:

**C 1:** Sử dụng công thức: $d(M,\Delta)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.

**C 2:** Lập phương trình $mp\left(P\right)$ đi qua $M$ vuông góc với $\Delta$. Tìm giao điểm $H$ của $(P)$ với $\Delta$. Khi đó độ dài $MH$ là khoảng cách cần tìm.

**b) Khoảng cách giữ hai đường thẳng chéo nhau:**

Cho hai đường thẳng chéo nhau $\Delta$ đi qua $M_0$ có VTCP $\vec{u}$ và $\Delta'$ đi qua $M_0'$ có VTCP $\overrightarrow{u'}$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta$ và $\Delta'$ được tính theo các cách sau:

**C 1:** Sử dụng công thức: $d(\Delta,\Delta')=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\right|}$.

**C 2:** Tìm đoạn vuông góc chung $MN$. Khi đó độ dài $MN$ là khoảng cách cần tìm.

**C 3:** Lập phương trình $mp\left(P\right)$ đi qua $\Delta$ và song song với $\Delta'$. Khi đó khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ một điểm bất kì trên $\Delta'$ đến $(P)$.

**IV. GÓC**

**1. Góc giữa hai đường thẳng:**

Cho hai đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$

và đường thẳng $\Delta':\dfrac{x-x_0'}{a'}=\dfrac{y-y_0'}{b'}=\dfrac{z-z_0'}{c'}$ có VTCP $\overrightarrow{u'}=(a';b';c')$.

Đặt $\alpha=\left(\Delta,\Delta'\right)$, khi đó:

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{u'}\right)\right|=\frac{\left|aa'+bb'+cc'\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

**2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng**

Cho mp $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$ là VTPT và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-x_o}{a}=\dfrac{y-y_o}{b}=\dfrac{z-z_o}{c}$ có $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP. Gọi $\varphi$ là góc giữa $mp(\alpha)$ và đường thẳng $\Delta$, khi đó ta có:

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{n},\vec{u}\right)\right| = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

**3. Góc giữa hai mặt phẳng**

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(A;B;C)$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=\left(A';B';C'\right)$.

Gọi $\varphi$ là góc giữa hai mặt phẳng ($0^0 \le \varphi \le 90^0$). Khi đó:

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

# B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

## Vấn đề 1. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ VECTƠ

**Phương pháp:**

- Dựa vào định nghĩa tọa độ của điểm, tọa độ của véc tơ
- Dựa vào các phép toán véc tơ

*Áp dụng các tính chất sau:*

*Cho các vectơ* $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3), \vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$ *và số thực k tùy ý .Khi đó ta có*

*a)* $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=v_1 \\ u_2=v_2 \\ u_3=v_3 \end{cases}$

*b)* $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3)$

*c)* $\vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1;u_2-v_2;u_3-v_3)$

*d)* $k\vec{u}=(ku_1;ku_2;ku_3)$

**Ví dụ 1.1.6** Cho hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^0$, $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$

**1.** Tính $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$

**2.** Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{x}=3\vec{a}+2\vec{b}$

**Lời giải.**

**1.** Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2.3.\cos 120^0=-3$

$\Rightarrow\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-4\vec{a}.\vec{b}+4\vec{b}^2=2^2+4.3+4.3^2=52\Rightarrow\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=2\sqrt{13}$

**2.** Ta có: $\vec{a}.\vec{x}=\vec{a}\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)=3\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}=6$ và $\left|\vec{x}\right|=\sqrt{(3\vec{a}+2\vec{b})^2}=6$

Suy ra $\cos\left(\vec{x},\vec{a}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{x}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{x}\right|}=\dfrac{6}{6.2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{x}\right)=60^0$.

**Ví dụ 2.1.6** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;0;-2),\vec{b}=(-2;1;3),\vec{c}=(-4;3;5)$

**1.** Tìm toạ độ vectơ $3.\vec{a}-4.\vec{b}+2\vec{c}$

**2.** Tìm hai số thực $m$, $n$ sao cho $m.\vec{a}+n.\vec{b}=\vec{c}$.

**Lời giải.**

**1.** Tọa độ vectơ $3.\vec{a}-4.\vec{b}+2\vec{c}$

$\vec{a}=(1;0;-2)\Rightarrow 3.\vec{a}=(3;0;-6)$,

$\vec{b}=(-2;1;3)\Rightarrow -4\vec{b}=(8;-4;-12)$,

$\vec{c}=(-4;3;5)\Rightarrow 2.\vec{c}=(-8;3;10)$,

Suy ra $3.\vec{a}-4.\vec{b}+2\vec{c}=\left(3+8-8;0-4+3;-6-12+10\right)=\left(3;-1;4\right)$.

**2.** Tìm m,n .

Ta có $m.\vec{a}+n.\vec{b}=(m-2n;n;-2m+3n)$,

Suy ra $m.\vec{a}+n.\vec{b}=\vec{c}\Leftrightarrow\begin{cases}m-2n=-4\\n=3\\-2m+3n=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=3\end{cases}$.

**Ví dụ 3.1.6** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ có $A\left(2;-3;1\right)$, $B\left(1;-1;4\right)$ và $C\left(-2;1;6\right)$.

**1.** Xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác $ABC$;

**2.** Xác định toạ độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành và toạ độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành này;
**3.** Xác định toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$

**Lời giải.**
**1.** Xác định tọa độ trọng tâm G .
Theo tính chất của trọng tâm G ,ta có :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{11}{3} \end{cases}.$$

**2.** Xác định tọa độ điểm D.
Vì A,B,C là ba đỉnh của một tam giác ,do đó

$$\text{ABCD là hình bình hành } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \\ z_B - z_A = z_C - z_D \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2 - x_D \\ 2 = 1 - y_D \\ 3 = 6 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = -1. \\ z_D = 3 \end{cases}$$

Vậy $D(-1;-1;3)$.
Giao điểm I của hai đường chéo AC và BD của hình bình hành ABCD là trung điểm của AC ,suy ra $I\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 0 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = -1 \\ z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$.

**3.** Xác định tọa độ M.
Gọi $(x;y;z)$ là toạ độ của M,ta có

$$\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x=-2(1-x)\\-3-y=-2(-1-y)\\1-z=-2(4-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=-\dfrac{5}{3}\\z=3\end{cases}$$

**Ví dụ 4.1.6** Cho tam giác $ABC$ có $A(1;0;-2), B(-1;1;0), C(-2;4;-2)$.
**1.** Tìm tọa độ trọng tâm $G$, trực tâm $H$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I$ của tam giác $ABC$.
**2.** Tìm tọa độ giao điểm của phân giác trong, phân giác ngoài góc $A$ với đường thẳng $BC$.

**Lời giải.**

**1.** $\overrightarrow{AB}(-2;1;2), \overrightarrow{BC}(-1;3;-2), \overrightarrow{CA}(3;-4;0)$.

Trọng tâm $G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-8;-6;-5)$. Tọa độ điểm $H$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\\\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3y+2z=-3\\3x-4y=-7\\8x+6y+5z=-2\end{cases}\Rightarrow H\left(-\dfrac{29}{25};\dfrac{22}{25};\dfrac{2}{5}\right).$$

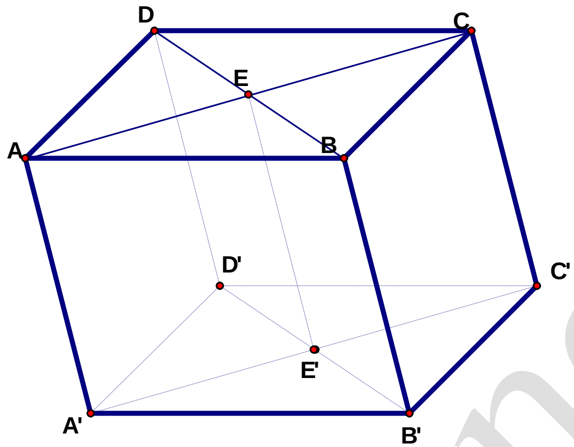
Tọa độ điểm $I$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\\\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-2y-4z=3\\6x-8y=-19\\8x+6y+5z=-2\end{cases}\Rightarrow I\left(-\dfrac{21}{50};\dfrac{103}{50};-\dfrac{11}{5}\right).$$

**2.** Gọi $E,F$ lần lượt là giao điểm của phân giác trong, phân giác ngoài góc $A$ với đường thẳng $BC$. Từ $\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{FB}{FC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{5}$ ta tính được tọa độ các điểm $E\left(-\dfrac{11}{8};-\dfrac{7}{8};-\dfrac{3}{4}\right)$, $F\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{7}{2};3\right)$.

**Ví dụ 5.1.6** Trong không gian Oxyz, , cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có A(-1,2,3) ,C(1; 4; 5) ,B'(-3;3;-2) , D'(5;3;2) . Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

**Lời giải.**




Gọi E, E' lần lượt là trung điểm của AC và B'D' thì ta có

$\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$ và

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 0 \\ y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = 3 \\ z_E = \dfrac{z_A + z_C}{2} = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{E'} = \dfrac{x_{B'} + x_{D'}}{2} = 1 \\ y_{E'} = \dfrac{y_{B'} + y_{D'}}{2} = 3 \\ z_{E'} = \dfrac{z_{B'} + z_{D'}}{2} = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $\overrightarrow{EE'} = (1; 0; -4)$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{EE'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} + 1 = 1 \\ y_{A'} - 2 = 0 \\ z_{A'} - 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow A'(0; 2; -1).$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{EE'} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x_B = 1 \\ 3 - y_B = 0 \\ -2 - z_B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow B(-4; 3; 2).$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{EE'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} - 1 = 1 \\ y_{C'} - 4 = 0 \\ z_{C'} - 5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow C'(2;4;1)$$

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x_D = 1 \\ 3 - y_D = 0 \\ 2 - z_D = -4 \end{cases} \Leftrightarrow D(4;3;6)$$

**Ví dụ 6.1.6** Cho hình chóp $S.ABCD$ với điểm $A(4;-1;2)$, $B(-1;0;-1)$ và $C(0;0;-2)$, $D(10;-2;4)$. Gọi $M$ là trung điểm của $CD$. Biết $SM$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = 66$ (đvtt). Tìm tọa độ đỉnh $S$.

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AB}(-5;1;-3), \overrightarrow{DC}(-10;2;-6) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2.\overrightarrow{AB}$ nên $ABCD$ là hình thang và

$S_{ADC} = 2S_{ABC}$, hay $S_{ABCD} = 3S_{ABC}$.

Vì $\overrightarrow{AB}(-5;1;-3), \overrightarrow{AC}(-4;1;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1;-8;-1)$, do đó

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{\sqrt{66}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{66}}{2} \text{ (đvdt).}$$

Chiều cao của khối chóp là $SM = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = 2\sqrt{66}$.

Vì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \perp \overrightarrow{AB}$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \perp \overrightarrow{AC}$ nên giá của véc tơ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, mà $SM \perp (ABCD)$ nên tồn tại số thực $k$ sao cho:

$$\overrightarrow{SM} = k.\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-k;-8k;-k).$$

Suy ra $2\sqrt{66} = \left|\overrightarrow{SM}\right| = \sqrt{(-k)^2 + (-8k)^2 + (-k)^2} \Leftrightarrow |k| = 2 \Leftrightarrow k = \pm 2.$

$M$ là trung điểm $CD$ nên $M(5;-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{SM}(5 - x_S; -1 - y_S; 1 - z_S)$.

- Nếu $k = 2$ thì $\overrightarrow{SM} = (5 - x_S; -1 - y_S; 1 - z_S) = (-2;-16;-2)$ nên tọa độ của điểm S là $S(7;15;3)$.

- Nếu $k=-2$ thì $\overrightarrow{SM}=(5-x_S;-1-y_S;1-z_S)=(2;16;2)$ nên tọa độ của điểm $S$ là $S(3;-17;-1)$.

Vậy tọa độ các điểm $S$ cần tìm là $S(7;15;3)$ hoặc $S(3;-17;-1)$.

**Ví dụ 7.1.6** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz ,cho tam giác ABC có A(2; -1;3) , B(3;0; -2) , C(5; - 1; -6)

**1.** Tính $\cos BAC$ ,suy ra số đo của $BAC$ ;

**2.**Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A trên BC và toạ độ điểm A' đối xứng của A qua đường thẳng BC.

**Lời giải.**

***1.***Tính$\cos BAC$ và số đo của $BAC$

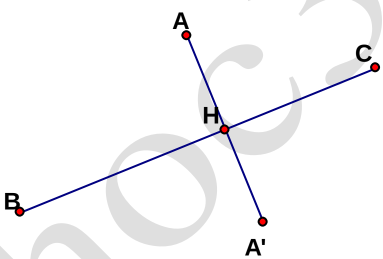
Ta có : $\overrightarrow{AB}=(1;1;-5)$ , $\overrightarrow{AC}=(3;0;-9)$ **,**suy ra

$$\cos BAC=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$=\frac{3+45}{\sqrt{1^2+1^2+(-5)^2}.\sqrt{3^2+0^2+(-9)^2}}=\frac{48}{\sqrt{27}.\sqrt{90}}=\frac{16}{3\sqrt{30}}$$

Suy ra $BAC\simeq 13^0 10'$

***2.*** Tọa độ hình chiếu vuông góc H của A lên đường thẳng BC.




Kí hiệu (x;y;z) là toạ độ của H ,tacó

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\text{ cuøng phöông }\overrightarrow{BC}\end{cases}$$

$\overrightarrow{AH}=(x-2;y+1;z-3)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-1;-4)$

, $\overrightarrow{BH}=(x-3;y;z+2)$

$$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 2(x-2)-(y+1)-$$

$$\Leftrightarrow 2x-y-4z+7=0.$$

$\overrightarrow{BH}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\ 4y-z=2\end{cases}$

Giải hệ $\begin{cases}2x-y-4z=-7\\ x+2y=3\\ 4y-z=2\end{cases}$ ta được $H(1;1;2)$.

hoc360.net

Tọa độ A’ đối xứng của A qua BC.

A’ là điểm đối xứng của A qua đường thẳng BC $\Leftrightarrow$ H là trung điểm của AA’

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_H = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \\ z_H = \dfrac{z_A + z_{A'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 3 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 1 \end{cases}$$ Vậy A’$(0;3;1)$

**Ví dụ 8.1.6** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz ,cho tam giác ABC có A(4;2;0) , B(2;4;0) và C(2;2;1). Xác định tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

**Lời giải.**

Toạ độ trực tâm của tam giác ABC

Gọi H(x;y;z) là trực tâm của tam giác ABC ,ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ ñoàg phaúg} \end{cases}.$$

Trong đó $\overrightarrow{AH} = (x-4; y-2; z)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -2;1)$

, $\overrightarrow{BH} = (x-2; y-4; z)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;0;1)$.

* $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -2(y-2) + z = 0 \Leftrightarrow 2y - z = 4$

* $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -2(x-2) + z = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 4.$

* $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AH} = 0$ (trong đó

$[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}] = (-2;-2;-4)$ ) $\Leftrightarrow$ - 2(x – 4) -2(y – 2) – 4z =0

$\Leftrightarrow$ x + y + 2z = 6

Giải hệ: $\begin{cases} 2y - z = 4 \\ 2x - z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \end{cases}$ , ta được H$(\frac{7}{3};\frac{7}{3};\frac{2}{3})$ ).

Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi I(x;y;z) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ,ta có

$$\begin{cases} AI = BI = CI \\ \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI} \text{ ñoàg phaúg} \end{cases}$$

hoc360.net

* AI = BI = CI $\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 + z^2 \\ (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 4x - 2z = 11 \end{cases}$

* $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AI} = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z = 6$

Giải hệ $\begin{cases} x - y = 0 \\ 4x - 2z = 11 \\ x + y + 2z = 6 \end{cases}$ ,ta được $I\left(\dfrac{23}{8}; \dfrac{23}{8}; \dfrac{1}{4}\right)$.

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**Bài 1**

**1.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba véc tơ

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k},\ \vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k},\ \vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$$

a) Xác định tọa độ các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ và tính $\left|\vec{x}\right|$

b) Tìm giá trị của $x$ để véc tơ $\vec{y} = \left(2x - 1; -x; 3x + 2\right)$ vuông góc với véc tơ $2\vec{b} - \vec{c}$

c) Chứng minh rằng các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng và phân tích véc tơ $\vec{u} = \left(3; 7; -14\right)$ qua ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

**2.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các véc tơ

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k},\ \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k},\ \vec{c} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

a) Xác định tọa độ các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

b) Tìm tọa độ véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ và tính $\left|\vec{u}\right|$

c) Tìm $x$ để véc tơ $\vec{v} = (3x - 1; x + 2; 3 - x)$ vuông góc với $\vec{b}$

d) Biểu diễn véc tơ $\vec{x} = (3; 1; 7)$ qua ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

**Bài 2**

**1.** Cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $\left|\vec{a}\right| = 2\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^0$. Tính

a) Độ dài các véc tơ $\vec{a} + \vec{b}, 5\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{b}$,

b) Độ dài véc tơ $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a},3\vec{b}\right],\left[5\vec{a},-2\vec{b}\right]$.

**2.** Tìm điều kiện của tham số $m$ sao cho

a) Ba véc tơ $\vec{u}(2;1;-m),\vec{v}(m+1;-2;0),\vec{w}(1;-1;2)$ đồng phẳng.

b) $A(1;-1;m),B(m;3;2m-1),C(4;3;1),D(m+3;-m;2-m)$ cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}(2;m;2m-1),\vec{b}(m;2;-1)$ là $60^0$.

**Bài 3** Cho tam giác $ABC$ có $B(-1;1;-1),C(2;3;5)$. Điểm $A$ có tung độ là $\frac{1}{3}$, hình chiếu của điểm $A$ trên $BC$ là $K\left(1;\frac{7}{3};3\right)$ và diện tích tam giác $ABC$ là $S=\frac{49}{3}$.

**1.** Tìm tọa độ đỉnh $A$ biết $A$ có hoành độ dương.

**2.** Tìm tọa độ chân đường vuông góc hạ từ $B$ đến $AC$.

**3.** Tìm tọa độ tâm $I$ của đường tròn ngoại tiếp và tọa độ trực tâm $H$ của tam giác $ABC$.

**4.** Chứng minh $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GI}$ với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

**Bài 4** Cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau. Tọa độ các điểm $A(2;4;1),B(0;4;4),C(0;0;1)$ và $D$ có hoành độ dương.

**1.** Xác định tọa độ điểm $D$.

**2.** Gọi $G$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $G$ cách đều các đỉnh của tứ diện.

**3.** Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AB,CD$. Chứng minh rằng $MN$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $AB$ và $CD$.

**4.** Tính độ dài các đường trọng tuyến của tứ diện $ABCD$.

Tính tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh của tứ diện $ABCD$.

**Bài 5** Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(0;2;0)$, $B(-1;0;-3)$, $C(0;-2;0)$, $D(3;2;1)$.

**1**. Chứng minh rằng bốn điểm $A,B,C,D$ không đồng phẳng;

**2**. Tính diện tích tam giác $BCD$ và đường cao $BH$ của tam giác $BCD$;

**3**. Tính thể tích tứ diện $ABCD$ và đường cao của tứ diện hạ từ $A$;

**4**. Tìm tọa độ $E$ sao cho $ABCE$ là hình bình hành;

**5**. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AC$ và $BD$;

**6**. Tìm điểm $M$ thuộc $Oy$ sao cho tam giác $BMC$ cân tại ;

**7**. Tìm tọa độ trọng tâm $G$ của tứ diện $ABCD$ và chứng minh $A, G, A'$ thẳng hàng với $A'$ là trọng tâm tam giác $BCD$.

**Bài 6** Cho tam giác $ABC$ có $A(2;3;1), B(-1;2;0), C(1;1;-2)$.

**1**. Tìm tọa độ chân đường vuông góc kẻ từ $A$ xuống $BC$.

**2**. Tìm tọa độ $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$.

**3**. Tìm tọa độ $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $ABC$.

**4**. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Chứng minh rằng các điểm $G, H, I$ nằm trên một đường thẳng.

**Bài 8**

Trong không gian với hệ tọa độ Đề Các vuông góc $Oxyz$ cho tam giác đều $ABC$ có $A(5;3;-1), B(2;3;-4)$ và điểm $C$ nằm trong mặt phẳng $(Oxy)$ có tung độ nhỏ hơn $3$.

a) Tìm tọa độ điểm $D$ biết $ABCD$ là tứ diện đều.

b) Tìm tọa độ điểm $S$ biết $SA, SB, SC$ đôi một vuông góc.

**Bài 9**

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A\left(3;-2;4\right)$

a) Tìm tọa độ các hình chiếu của $A$ lên các trục tọa độ và các mặt phẳng tọa độ

b) Tìm $M \in Ox, N \in Oy$ sao cho tam giác $AMN$ vuông cân tại $A$

c) Tìm tọa độ điểm $E$ thuộc mặt phẳng $(Oyz)$ sao cho tam giác $AEB$ cân tại $E$ và có diện tích bằng $3\sqrt{29}$ với $B\left(-1;4;-4\right)$.

**CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC**

**Bài 10**

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho $A(4;0;0)$, $B(x_0;y_0;0)$ với $x_0, y_0 > 0$ thỏa mãn $AB = 2\sqrt{10}$ và $AOB = 45^0$.

a) Tìm $C$ trên tia $Oz$ sao cho thể tích tứ diện $OABC$ bằng $8$.

b) Gọi $G$ là trọng tâm $\Delta ABO$ và $M$ trên cạnh $AC$ sao cho $AM = x$. Tìm $x$ để $OM \perp GM$.