TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

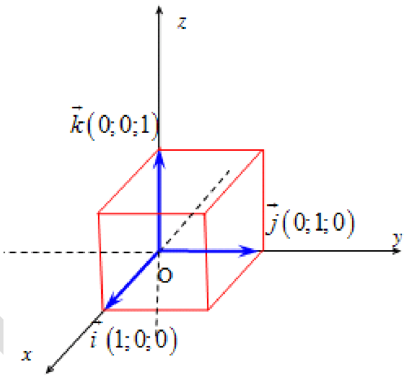
1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy gọi là ***hệ trục tọa độ vuông góc*** trong không gian.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của vectơ

a) Định nghĩa: $\vec{u} = (x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



b) Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3),\ k \in R$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0;0;0),\ \vec{i} = (1;0;0),\ \vec{j} = (0;1;0),\ \vec{k} = (0;0;1)$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}\ (k \in R)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},\ (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ *(với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)*

3. Tọa độ của điểm

a) Định nghĩa: $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ *(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

Chú ý:
- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$
- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

b) Tính chất: Cho $A(x_A;\, y_A;\, z_A),\; B(x_B;\, y_B;\, z_B)$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC:
$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$
- Toạ độ trọng tâm G của tứ diện ABCD:
$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_C}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vectơ

a) Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, được xác định bởi

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \left(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1\right)$$

Chú ý: *Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.*

b) Tính chất:

- $[\vec{a},\, \vec{b}] \perp \vec{a}$; $\qquad [\vec{a},\, \vec{b}] \perp \vec{b}$
- $\left[\vec{a},\, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$
- $\left[\vec{i}, \vec{j}\right] = \vec{k}$; $\qquad \left[\vec{j}, \vec{k}\right] = \vec{i}$; $\qquad \left[\vec{k}, \vec{i}\right] = \vec{j}$
- $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ **(Chương trình nâng cao)**
- $\vec{a},\, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a},\, \vec{b}] = \vec{0}$ (chứng minh 3 điểm thẳng hàng)

c) Ứng dụng của tích có hướng: (Chương trình nâng cao)

- ***Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:*** $\vec{a},\, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a},\, \vec{b}].\vec{c} = 0$
- ***Diện tích hình bình hành*** $ABCD$: $\qquad S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$
- ***Diện tích tam giác*** ABC: $\qquad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ***Thể tích khối hộp*** $ABCDA'B'C'D'$: $\qquad V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- ***Thể tích tứ diện*** $ABCD$: $\qquad V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

Chú ý:

– ***Tích vô hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– ***Tích có hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

$$\begin{array}{|l|}\hline \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \\ \vec{a} \text{ vaø } \vec{b} \text{ cuøng phöông} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0} \\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ ñoàng phaúng } \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = 0 \\ \hline \end{array}$$

5. Một vài thao tác sử dụng máy tính bỏ túi (Casio Fx570 Es Plus, Casio Fx570 Vn Plus, Vinacal 570 Es Plus)

Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$

`w 8 1 1` (nhập vectơ $\overrightarrow{AB}$)

`q 5 2 2 2` (nhập vectơ $\overrightarrow{AC}$)

`q 5 2 3 1` (nhập vectơ $\overrightarrow{AD}$)

`C q53q54=` (tính $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$)

`C q53q54q57q55=` (tính $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}$)

`Cqc`(Abs) `q53q54q57q55=` (tính $\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$)

`C1a6qc`(Abs) `q53q54q57q55=`

(tính $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos\varphi$ bằng:

A. $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.　B. $\dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.　C. $\dfrac{-\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.　D. $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

Câu 2. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}(1;2;0)$ và $\vec{b}(2;0;-1)$, khi đó $\cos\varphi$ bằng:

A. $\frac{2}{5}$. B. 0. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. $-\frac{2}{5}$.

Câu 3. Cho vectơ $\vec{a}(1;3;4)$, tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$

A. $\vec{b}(-2;-6;-8)$. B. $\vec{b}(-2;-6;8)$. C. $\vec{b}(-2;6;8)$. D. $\vec{b}(2;-6;-8)$.

Câu 4. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}(-2;2;5), \vec{b}(0;1;2)$ trong không gian bằng:

A. 12. B. 13. C. 10. D. 14.

Câu 5. Trong không gian cho hai điểm $A(-1;2;3), B(0;1;1)$, độ dài đoạn AB bằng

A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{8}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\sqrt{12}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, khi đó với $M(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. B. $x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$. C. $x\vec{j}+y\vec{i}+z\vec{k}$. D. $-x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$.

Câu 7. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3), \vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ là một vectơ, kí hiệu $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, được xác định bằng tọa độ:

A. $(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$. B. $(a_2b_3+a_3b_2;a_3b_1+a_1b_3;a_1b_2+a_2b_1)$.

C. $(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1+a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$. D. $(a_2b_2-a_3b_3;a_3b_3-a_1b_1;a_1b_1-a_2b_2)$.

Câu 8. Cho các vectơ $\vec{u}(u_1;u_2;u_3)$ và $\vec{v}(v_1;v_2;v_3)$, $\vec{u}.\vec{v}=0$ khi và chỉ khi:

A. $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$. B. $u_1+v_1+u_2+v_2+u_3+v_3=0$.

C. $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=1$. D. $u_1v_2+u_2v_3+u_3v_1=-1$.

Câu 9. Cho vectơ $\vec{a}(1;-1;2)$, độ dài vectơ $\vec{a}$ là:

A. $\sqrt{6}$. B. 2. C. $-\sqrt{6}$. D. 4.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên trục Ox sao cho M không trùng với gốc tọa độ, khi đó tọa độ điểm M có dạng

A. $M(a;0;0), a\neq 0$. B. $M(0;b;0), b\neq 0$. C. $M(0;0;c), c\neq 0$. D. $M(a;1;1), a\neq 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho M không trùng với gốc tọa độ và không nằm trên hai trục Ox, Oy, khi đó tọa độ điểm M là ($a,b,c\neq 0$):

A. $(a;b;0)$. B. $(0;b;a)$. C. $(0;0;c)$. D. $(a;1;1)$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(0;3;4)$ và $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$, khi đó tọa độ vectơ $\vec{b}$ có thể là

A. $(-8;0;-6)$. B. $(4;0;3)$. C. $(2;0;1)$. D. $(0;3;4)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, khi đó $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|$ bằng

A. $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$. B. $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$. C. $\vec{u}.\vec{v}.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$. D. $\vec{u}.\vec{v}.\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}(1;-1;2),\vec{b}(3;0;-1),\vec{c}(-2;5;1)$, vectơ $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ có tọa độ là

A. $(6;-6;0)$. B. $(-6;6;0)$. C. $(6;0;-6)$. D. $(0;6;-6)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;-3),B(2;4;-1),C(2;-2;0)$. Độ dài các cạnh AB,AC,BC của tam giác ABC lần lượt là

A. $\sqrt{21},\sqrt{14},\sqrt{37}$. B. $\sqrt{11},\sqrt{14},\sqrt{37}$. C. $\sqrt{21},\sqrt{13},\sqrt{37}$. D. $\sqrt{21},\sqrt{13},\sqrt{35}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;-3),B(2;4;-1),C(2;-2;0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$. B. $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. C. $(5;2;4)$. D. $\left(\frac{5}{2};1;-2\right)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;0),B(-1;1;3),C(0;-2;5)$. Để 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng thì tọa độ điểm D là

A. $D(-2;5;0)$. B. $D(1;2;3)$. C. $D(1;-1;6)$. D. $D(0;0;2)$.

Hướng dẫn giải

Tính $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}=(1;2;3),\vec{b}=(-2;0;1),\vec{c}=(-1;0;1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}-3\vec{i}$

A. $\vec{n}=(-6;2;6)$. B. $\vec{n}=(6;2;-6)$. C. $\vec{n}=(0;2;6)$. D. $\vec{n}=(-6;2;6)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;2),B(-2;1;3),C(3;2;4)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

A. $G\left(\frac{2}{3};1;3\right)$. B. $G(2;3;9)$. C. $G(-6;0;24)$. D. $G\left(2;\frac{1}{3};3\right)$.

Câu 20. Cho 3 điểm $M(2;0;0),N(0;-3;0),P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là

A. $(2;3;4)$ B. .$(-2;-3;4)$ C. $(3;4;2)$ D. $(-2;-3;-4)$

Hướng dẫn giải

Gọi $Q(x;y;z)$, $MNPQ$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\\z-4=0\end{cases}$

Câu 21. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1;1;1), N(2;3;4), P(7;7;5)$. Để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

A. $Q(6;5;2)$. B. $Q(-6;5;2)$. C. $Q(6;-5;2)$. D. $Q(-6;-5;-2)$.

Hướng dẫn giải

Điểm $Q(x;y;z)$

$\overrightarrow{MN}=(1;2;3)$, $\overrightarrow{QP}=(7-x;7-y;5-z)$

Vì $MNPQ$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}\Rightarrow Q(6;5;2)$

Câu 22. Cho 3 điểm $A(1;2;0), B(1;0;-1), C(0;-1;2)$. Tam giác ABC là

A. Tam giác có ba góc nhọn. B. Tam giác cân đỉnh A.

C. Tam giác vuông đỉnh A. D. Tam giác đều.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{AB}=(0;-2;-1);\overrightarrow{AC}=(-1;-3;2)$. Ta thấy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\neq 0\Rightarrow \Delta ABC$ không vuông.

$\left|\overrightarrow{AB}\right|\neq\left|\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \Delta ABC$ không cân.

Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;2), B(0;1;3), C(-3;4;0)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là

A. $D(-4;5;-1)$. **B.** $D(4;5;-1)$. **C.** $D(-4;-5;-1)$. **D.** $D(4;-5;1)$.

Hướng dẫn giải

Điểm $D(x;y;z)$

$\overrightarrow{AB}(1;-1;1)$, $\overrightarrow{DC}(-3-x;4-y;-z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow D(-4;5;-1)$

Câu 24. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 60^0 và $\left|\vec{a}\right|=2;\left|\vec{b}\right|=4$. Khi đó $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ bằng

A. $2\sqrt{7}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=4+16+8=28\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\sqrt{7}$.

Câu 25. Cho điểm $M(1;2;-3)$, khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy) bằng

A. 3. B. -3. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Với $M(a;b;c) \Rightarrow d(M,(Oxy)) = |c|$

Câu 26. Cho điểm $M(-2;5;0)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy là điểm

A. $M'(0;5;0)$. B. $M'(0;-5;0)$. C. $M'(2;5;0)$. D. $M'(-2;0;0)$.

Hướng dẫn giải

Với $M(a;b;c) \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy là $M_1(0;b;0)$

Câu 27. Cho điểm $M(1;2;-3)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

A. $M'(1;2;0)$. B. $M'(1;0;-3)$. C. $M'(0;2;-3)$. D. $M'(1;2;3)$.

Hướng dẫn giải

Với $M(a;b;c) \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy) là $M_1(a;b;0)$

Câu 28. Cho điểm $M(-2;5;0)$, khoảng cách từ điểm M đến trục Ox bằng

A. 5. B. 25. C. 4. D. 0.

Hướng dẫn giải

Với $M(a;b;c) \Rightarrow d(M,Ox) = \sqrt{b^2+c^2}$

Câu 29. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với I là trọng tâm của đáy ABC. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. B. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=0$. C. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. D. $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vecto $\vec{a}=(-1;1;0)$; $\vec{b}=(1;1;0)$; $\vec{c}=(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

A. $\vec{b}\perp\vec{c}$. B. $|\vec{a}|=\sqrt{2}$. C. $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. D. $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Hướng dẫn giải

Vì $\vec{b}.\vec{c}=2\neq 0$.

VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Cho điểm $M(3;2;-1)$, điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oxy) là điểm

A. $M'(3;2;1)$. **B.** $M'(3;-2;-1)$. **C.** $M'(3;-2;1)$. **D.** $M'(3;2;0)$.

Hướng dẫn giải

Với $M(a;b;c) \Rightarrow$ điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oxy) là $M(a;b;-c)$

Câu 2. Cho điểm $M(3;2;-1)$, điểm $M'(a;b;c)$ đối xứng của M qua trục Oy, khi đó $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Với $M(a;b;c) \Rightarrow$ điểm đối xứng của M qua trục Oy là $M'(-a;b;-c)$

$\Rightarrow M'(-3;2;1) \Rightarrow a+b+c=0.$

Câu 3. Cho $\vec{u}(1;1;1)$ và $\vec{v}(0;1;\mathrm{m})$. Để góc giữa hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ có số đo bằng 45^0 thì m bằng

A. $2\pm\sqrt{3}$. **B.** $\pm\sqrt{3}$. **C.** $1\pm\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\cos\varphi = \frac{1.0+1.1+1.m}{\sqrt{3}.\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}(m+1) = \sqrt{3}\sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 3(m^2+1) = 2(m+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 2\pm\sqrt{3}$$

Câu 4. Cho $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2), D(3;3;1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Tính $\overrightarrow{AB}(2;5;2), \overrightarrow{AC}(-2;4;2), \overrightarrow{AD}(2;5;1)$

$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = 3$

Sử dụng Casio

w 8 1 1 (nhập vectơ $\overrightarrow{AB}$)

q 5 2 2 2 (nhập vectơ $\overrightarrow{AC}$)

q 5 2 3 1 (nhập vectơ $\overrightarrow{AD}$)

C1a6qc(abs) q53q54q57q55= (tính V)

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$. Độ dài đường cao vẽ từ D của tứ diện $ABCD$ cho bởi công thức nào sau đây:

A. $h = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right]\right|}$.

B. $h = \dfrac{1}{3}\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}$.

C. $h = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}$..

D. $h = \dfrac{1}{3}\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right]\right|}$.

Hướng dẫn giải

Vì $V_{ABCD} = \frac{1}{3}h.\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$ nên $h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}$.

Câu 6. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2), D(3;3;1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là

A. $\frac{9}{7\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{9}{7}$. **C.** $\frac{9}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{9}{14}$.

Hướng dẫn giải

Tính $\overrightarrow{AB}(2;5;2), \overrightarrow{AC}(-2;4;2), \overrightarrow{AD}(2;5;1)$

$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = 3$

$V = \frac{1}{3}B.h$, với $B = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = 7\sqrt{2}$, $h = d\left(D,(ABC)\right)$

$\Rightarrow h = \frac{3V}{B} = \frac{3.3}{7\sqrt{2}} = \frac{9}{7\sqrt{2}}$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;0;2), B(-2;1;3), C(3;2;4), D(6;9;-5)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$

A. $G(2;3;1)$. **B.** $G(8;12;4)$. **C.** $G\left(3;3;\frac{14}{4}\right)$. **D.** $G\left(-9;\frac{18}{4};-30\right)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(2;-1;2)$. Điểm M trên trục Ox và cách đều hai điểm A, B có tọa độ là

A. $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $M\left(0;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

$M \in Ox \Rightarrow M(a;0;0)$

M cách đều hai điểm A, B nên $MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (1-a)^2 + 2^2 + 1^2 = (2-a)^2 + 2^2 + 1^2$

$\Leftrightarrow 2a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;-1;2)$. Điểm M trên trục Oz và cách đều hai điểm A, B có tọa độ là

A. $M(0;0;4)$. **B.** $M(0;0;-4)$. **C.** $M\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;-2;3), B(0;3;1), C(4;2;2)$. Cosin của góc BAC là

A. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **B.** $\frac{9}{\sqrt{35}}$. **C.** $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $-\frac{9}{\sqrt{35}}$.

Câu 11. Tọa độ của vecto $\vec{n}$ vuông góc với hai vecto $\vec{a}=(2;-1;2), \vec{b}=(3;-2;1)$ là

A. $\vec{n}=(3;4;-1)$. **B.** $\vec{n}=(3;4;1)$. **C.** $\vec{n}=(-3;4;-1)$. **D.** $\vec{n}=(3;-4;-1)$.

Câu 12. Cho $|\vec{a}|=2; |\vec{b}|=5,$ góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$, $\vec{u}=k\vec{a}-\vec{b}; \vec{v}=\vec{a}+2\vec{b}.$ Để $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$ thì k bằng

A. $-\frac{45}{6}$. B. $\frac{45}{6}$. C. $\frac{6}{45}$. D. $-\frac{6}{45}$.

Hướng dẫn giải

$$\vec{u}.\vec{v}=\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=4k-50+(2k-1)|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3}$$
$$=-6k-45$$

Câu 13. Cho $\vec{u}=(2;-1;1), \vec{v}=(m;3;-1), \vec{w}=(1;2;1)$. Với giá trị nào của m thì ba vectơ trên đồng phẳng

A. $-\frac{8}{3}$. **B.** $-\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-2;m+2;m+6)$, $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}=3m+8$

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}=0 \Leftrightarrow m=-\frac{8}{3}$

Câu 14. Cho hai vectơ $\vec{a}=(1;\log_3 5;m)$, $\vec{b}=(3;\log_5 3;4)$. Với giá trị nào của m thì $\vec{a}\perp\vec{b}$

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=1; m=-1$. **D.** $m=2; m=-2$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;3), B(3;7;4), C(x;y;6)$. Giá trị của x,y để ba điểm A,B,C thẳng hàng là

A. $x=5; y=11$. **B.** $x=-5; y=11$. **C.** $x=-11; y=-5$. **D.** $x=11; y=5$.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{AB}=(1;2;1), \overrightarrow{AC}=(x-2;y-5;3)$

A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{3}{1} \Leftrightarrow x=5; y=11$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Tam giác ABC là tam giác

A. Tam giác vuông tại C.

B. Tam giác cân tại C.

C. Tam giác vuông cân tại C.

D. Tam giác đều.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{BA}=(5;0;10), \overrightarrow{CA}=(-3;0;6), \overrightarrow{CB}=(-8;0;-4)$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0 \Rightarrow$ tam giác vuông tại C, $CA \neq CB$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Tam giác ABC có diện tích bằng

A. 30. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 60.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$\overrightarrow{AB}=(-5;0;-10), \overrightarrow{AC}=(3;0;-6)$. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right]\right|=30$

Câu 18. Ba đỉnh của một hình bình hành có tọa độ là $(1;1;1), (2;3;4), (7;7;5)$. Diện tích của hình bình hành đó bằng

A. $2\sqrt{83}$. **B.** $\sqrt{83}$. **C.** 83. **D.** $\frac{\sqrt{83}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi 3 đỉnh theo thứ tự là A, B, C

$\overrightarrow{AB}=(1;2;3), \overrightarrow{AC}=(6;6;4)$

$S_{hbh}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{(-10)^2+14^2+(-6)^2}=2\sqrt{83}$

Câu 19. Cho 3 vecto $\vec{a}=(1;2;1)$; $\vec{b}=(-1;1;2)$ và $\vec{c}=(x;3x;x+2)$. Tìm x để 3 vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng

A. 1. B. -1. C. -2. D. 2.

Hướng dẫn giải

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng thì $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0 \Rightarrow x=1$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(3;-2;4)$, $\vec{b}=(5;1;6)$, $\vec{c}=(-3;0;2)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho vectơ $\vec{x}$ đồng thời vuông góc với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

A. $(0;0;0)$. B. $(0;0;1)$. C. $(0;1;0)$. D. $(1;0;0)$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy chỉ có $\vec{x}=(0;0;0)$ thỏa mãn $\vec{x}.\vec{a}=\vec{x}.\vec{b}=\vec{x}.\vec{c}=0$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

A. $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$. B. $\left(3;\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$. C. $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$. D. $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

$E(x;y;z)$, từ $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{8}{3}\\y=3\\z=-\frac{8}{3}\end{cases}$.

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M\left(a;b;c\right)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P=a^2+b^2-c^2$ có giá trị bằng

A. 44.. B. 43.. C. 42.. D. 45.

Hướng dẫn giải

$M(x;y;z)$, $ABCM$ là hình bình hành thì

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow\begin{cases}x-1=-2-2\\y-2=3+1\\z+1=3-3\end{cases}\Rightarrow M(-3;6;-1)\Rightarrow \text{P}=44.$.

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Tìm tọa độ điểm D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC

A. $D(0;1;3)$. B. $D(0;3;1)$. C. $D(0;-3;1)$. D. $D(0;3;-1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $AB=\sqrt{26}, AC=\sqrt{26}\Rightarrow$ tam giác ABC cân ở A nên D là trung điểm BC

$\Rightarrow\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{DC}\Rightarrow D(0;1;3)$.

Câu 24. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;3;5)$, $B(-4;3;2)$, $C(0;2;1)$. Tìm tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $I(-\frac{5}{3};\frac{8}{3};\frac{8}{3})$. B. $I(\frac{5}{3};\frac{8}{3};\frac{8}{3})$. C. $I(\frac{8}{3};\frac{5}{3};\frac{8}{3})$. D. $I(\frac{8}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3})$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $AB = BC = CA = 3\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC$ đều. Do đó tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trọng tâm của nó. Kết luận: $I\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (-1;1;0), \vec{b} = (1;1;0), \vec{c} = (1;1;1)$. Cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC'} = \vec{c}$. Thể tích của hình hộp nói trên bằng:

A. 2 B. 4 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \Rightarrow A(-1;1;0), \overrightarrow{OB} = \vec{b} \Rightarrow B(1;1;0), \overrightarrow{OC'} = \vec{c} \Rightarrow C'(1;1;1)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow C(2;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = (-1;1;1) = \overrightarrow{OO'} \Rightarrow V_{OABC.O'A'B'C'} = \left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right]\overrightarrow{OO'}\right|$

Câu 26. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho tọa độ 4 điểm $A(2;-1;1), B(1;0;0)$, $C(3;1;0), D(0;2;1)$. Cho các mệnh đề sau:

1) Độ dài $AB = \sqrt{2}$.
2) Tam giác BCD vuông tại B.
3) Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 6.
Các mệnh đề đúng là:

A. 2). B. 3). C. 1); 3). D. 2), 1)

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1,1,0); \vec{b} = (1,1,0); \vec{c} = (1,1,1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

A. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

C. $\cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $\vec{a}.\vec{b} = 1$.

Hướng dẫn giải

$\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, biết $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;-1;-2)$. Độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$ bằng:

A. $\frac{1}{\sqrt{13}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{13}}$. C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng công thức $h = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Câu 29. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với I là trọng tâm của đáy ABC. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng

A. $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.

B. $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.

C. $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$.

D. $\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CI} \end{array}\right\} \Rightarrow 3\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SB} + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}\right)$$

Vì I là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(-2;1;-1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 3.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = a, SC = 3a, ASB = CSB = 60^0, CSA = 90^0$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó khoảng cách SG bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

B. $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tổng quát: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và có $ASB = \alpha, BSC = \beta, CSA = \gamma$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó

$$SG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\gamma + 2bc\beta}$$

Chứng minh:

Ta có: $\overrightarrow{SG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$

$\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)^2=\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SC}^2+2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}$

Khi đó $SG=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab\cos\alpha+2ac\cos\gamma+2bc\beta}$

Áp dụng công thức trên ta tính được $SG=\frac{a\sqrt{15}}{3}$

Câu 2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $\left|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{AC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng

A. 2. B. 3 . C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{AC}(-1;-3;-2), \overrightarrow{MB}(-2-m;-6-m;2-m)$

$\left|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{m^2+m^2+(m-6)^2}=\sqrt{3m^2-12m+36}=\sqrt{3(m-2)^2+24}$

Để $\left|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{AC}\right|$ nhỏ nhất thì $m=2$

Câu 3. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $MA^2-MB^2-MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{MA}(2-m;5-m;1-m), \overrightarrow{MB}(-2-m;-6-m;2-m), \overrightarrow{MC}(1-m;2-m;-1-m)$

$MA^2-MB^2-MC^2=-3m^2-24m-20=28-3(m-4)^2\le 28$

Để $MA^2-MB^2-MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì $m=4$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6), B(-3;1;8), C(-1;0;7), D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH\perp(ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

A. $I(0;1;3)$.

B. $I(1;0;3)$

C. $I(0;-1;-3)$.

D. $I(-1;0;-3)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;-1;2),\overrightarrow{AC}(1;-2;1)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{DC}(-2;-2;4),\overrightarrow{AB}(-1;-1;2)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=2.\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow ABCD$ là hình thang và $S_{ABCD}=3S_{ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Vì $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}\Rightarrow SH=3\sqrt{3}$

Lại có H là trung điểm của $CD\Rightarrow H(0;1;5)$

Gọi $S(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}(-a;1-b;5-c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=k\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=k(3;3;3)=(3k;3k;3k)$

Suy ra $3\sqrt{3}=\sqrt{9k^2+9k^2+9k^2}\Rightarrow k=\pm1$

+) Với $k=1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(3;3;3)\Rightarrow S(-3;-2;2)$

+) Với $k=-1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-3;-3;-3)\Rightarrow S(3;4;8)$

Suy ra $I(0;1;3)$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;7),B(4;5;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm M. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm $M\Rightarrow M(0;y;z)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}=(2;-1-y;7-z),\overrightarrow{MB}=(4;5-y;-2-z)$

Từ $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$ ta có hệ $\begin{cases}2=k.4\\-1-y=k(5-y)\\7-z=k(-2-z)\end{cases}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;1;-1),B(3;0;1),C(2;-1;3)$ và D thuộc trục Oy. Biết $V_{ABCD}=5$ và có hai điểm $D_1(0;y_1;0),D_2(0;y_2;0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó y_1+y_2 bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$D\in Oy\Rightarrow D(0;y;0)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2),\overrightarrow{AD}=(-2;y-1;1),\overrightarrow{AC}=(0;-2;4)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right]=(0;-4;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4y+2$

$V_{ABCD}=5\Leftrightarrow\frac{1}{6}\left|-4y+2\right|=5\Leftrightarrow y=-7;y=8\Rightarrow D_1(0;-7;0),D_2(0;8;0)\Rightarrow y_1+y_2=1$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;4),B(3;0;-2),C(1;3;7)$. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A. Tính độ dài $\left|\overrightarrow{OD}\right|$.

A. $\frac{\sqrt{205}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{203}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{201}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{207}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $D(x;y;z)$

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=2$$

Vì D nằm giữa B, C (phân giác trong) nên $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=-2(1-x)\\-y=-2(3-y)\\-2-z=-2(7-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\y=2\\z=4\end{cases}$

Suy ra $D\left(\frac{5}{3};2;4\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{OD}\right|=\frac{\sqrt{205}}{3}$

Câu 8. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC, biết $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Tính độ dài phân giác trong AD của góc A

A. $\frac{2\sqrt{74}}{3}$. B. $\frac{3\sqrt{74}}{2}$. C. $2\sqrt{74}$. D. $3\sqrt{74}$.

Hướng dẫn giải

$D(x;y;z)$ là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Ta có $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DB}\Rightarrow D(\frac{17}{3};\frac{11}{3};-1)\Rightarrow AD=\frac{2\sqrt{74}}{3}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ $D(2;2;-1)$. Biết $M(x;y;z)$, để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$\geq GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$. Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)\Rightarrow x+y+z=7$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$. H là trực tâm tam giác ABC, khi đó, độ dài đoạn OH bằng

A. $\frac{\sqrt{870}}{15}$. B. $\frac{\sqrt{870}}{14}$. C. $\frac{\sqrt{870}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{870}}{12}$.

Hướng dẫn giải

$H(x;y;z)$ là trực tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow BH\perp AC, CH\perp AB, H\in(ABC)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\left\{x=\frac{2}{15};y=\frac{29}{15};z=-\frac{1}{3}\right.\Rightarrow H\left(\frac{2}{15};\frac{29}{15};-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{870}}{15}.$$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3;1;0)$, B nằm trên mặt phẳng (Oxy) và có hoành độ dương, C nằm trên trục Oz và $H(2;1;1)$ là trực tâm của tam giác ABC. Toạ độ các điểm B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4};\frac{17-\sqrt{177}}{2};0\right),C\left(0;0;\frac{3-\sqrt{177}}{4}\right)$.

B. $B\left(\frac{-3-\sqrt{177}}{4};\frac{17+\sqrt{177}}{2};0\right),C\left(0;0;\frac{3+\sqrt{177}}{4}\right)$.

C. $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4};\frac{17-\sqrt{177}}{2};0\right),C\left(0;0;\frac{3+\sqrt{177}}{4}\right)$.

D. $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4};\frac{17+\sqrt{177}}{2};0\right),C\left(0;0;\frac{3-\sqrt{177}}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $B(x;y;0)\in(Oxy), C(0;0;z)\in Oz$.

H là trực tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}\text{ ñoàg phaúg}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y-7=0 \\ 3x-3y+yz-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-3-\sqrt{177}}{4}; y=\frac{17+\sqrt{177}}{2}; z=\frac{3+\sqrt{177}}{4}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{-3-\sqrt{177}}{4};\frac{17+\sqrt{177}}{2};0\right), C\left(0;0;\frac{3+\sqrt{177}}{4}\right).$$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $6\sqrt{10}$. B. $5\sqrt{10}$. C. $10\sqrt{6}$. D. $10\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có trung điểm BD là $I(-1;-2;4)$, $BD=12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} AB^2=AD^2 \\ AI^2=\left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2+b^2+8^2=(a+5)^2+(b+4)^2 \\ (a+1)^2+(b+2)^2+4^2=36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-2a \\ (a+1)^2+(6-2a)^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\frac{17}{5} \\ b=\frac{-14}{5} \end{cases} \Rightarrow$ A(1; 2; 0) hoặc $A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right)$ (loại). Với $A(1;2;0) \Rightarrow C(-3;-6;8)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC, biết $A(5;3;-1)$, $B(2;3;-4)$, $C(3;1;-2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

A. $9-3\sqrt{6}$. B. $9-2\sqrt{6}$. C. $9+3\sqrt{6}$. D. $9+2\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $AC^2+BC^2=9+9=AB^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.

Suy ra: $r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{\frac{1}{2}CA.CB}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{3.3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}}=9-3\sqrt{6}$

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$. Biết $MN=\sqrt{13}, MON=60^0$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức $A=m+2n^2+p^2$ bằng

A. 29. B. 27. C. 28. D. 30.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{OM}(3;0;0), \overrightarrow{ON}(m;n;0) \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 3m$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OM}|.|\overrightarrow{ON}|\cos 60^0 \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}|.|\overrightarrow{ON}|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} = \dfrac{1}{2}$

$MN = \sqrt{(m-3)^2 + n^2} = \sqrt{13}$

Suy ra $m = 2; n = \pm 2\sqrt{3}$

$\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OP} = 6\sqrt{3}p \Rightarrow V = \dfrac{1}{6}|6\sqrt{3}p| = 3 \Rightarrow p = \pm\sqrt{3}$

Vậy $A = 2 + 2.12 + 3 = 29.$

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính giá trị biểu thức $P = 15a + 30b + 75c$

A. 50. B. 48. C. 52. D. 46.

Hướng dẫn giải

$I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow AI = BI = CI, I \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ CI^2 = BI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x = \dfrac{14}{15};\ y = \dfrac{61}{30};\ z = -\dfrac{1}{3} \right. \Rightarrow I\left(\dfrac{14}{15};\dfrac{61}{30};-\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow P = 50.$$