TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a;b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ *a* đến *b* (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta dùng kí hiệu $F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$. Vậy

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ *a* đến *b* có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào *f* và các cận *a*, *b* mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích *S* của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục O*x* và hai đường thẳng $x=a, x=b$. Vậy $S=\int_a^b f(x)dx$.

2. Tính chất của tích phân

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ $(a<b<c)$
4. $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ $(k\in\mathbb{R})$
5. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

A. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Một số phương pháp tính tích phân

I. Dạng 1: Tính tích phân theo công thức

Ví dụ 1: Tính các tính phân sau:

a) $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}$. b) $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$. c) $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{2x+9}{x+3}dx$. d) $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx$.

Hướng dẫn giải

a) $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}=\int_0^1 \frac{d(1+x)}{(1+x)^3}=-\frac{1}{2(1+x)^2}\Big|_0^1=\frac{3}{8}$.

b) $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

c) $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{2x+9}{x+3}dx=\int_0^1\left(2+\frac{3}{x+3}\right)dx=\left(2x+3\ln(x+3)\right)\Big|_0^1=3+6\ln 2-3\ln 3$.

d) $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(4-x^2\right)}{4-x^2}=\ln|4-x^2|\Big|_0^1=\ln\frac{3}{4}$.

Bài tập áp dụng

1) $\mathrm{I}=\int_0^1 x^3(x^4-1)^5dx$.

2) $\mathrm{I}=\int_0^1\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}+1\right)dx$.

3) $\mathrm{I}=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

4) $\mathrm{I}=\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

II. Dạng 2: Dùng tính chất cận trung gian để tính tích phân

Sử dụng tính chất $\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 2: Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2}|x+1|dx$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $|x+1|=\begin{cases}x+1, & -1\le x\le 2\\ -x-1, & -2\le x<-1\end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned}I&=\int_{-2}^{2}|x+1|dx=\int_{-2}^{-1}|x+1|dx+\int_{-1}^{2}|x+1|dx\\&=-\int_{-2}^{-1}(x+1)dx+\int_{-1}^{2}(x+1)dx\\&=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{2}=5.\end{aligned}$$

Bài tập áp dụng

1) $I = \int_{-4}^{3} |x^2 - 4|\, dx$.

2) $I = \int_{-1}^{2} |x^3 - 2x^2 - x + 2|\, dx$.

3) $I = \int_{0}^{3} |2^x - 4|\, dx$.

4) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin x|\, dx$.

5) $I = \int_{0}^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$.

III. Dạng 3: Phương pháp đổi biến số

1) Đổi biến số dạng 1

Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \le u(x) \le \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x), x \in [a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sin x$. Ta có $du = \cos x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u(0) = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

Bài tập áp dụng

1) $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}dx$.

2) $I = \int_0^1 x\sqrt[3]{x + 1}dx$.

3) $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}dx$.

4) $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{2x\sqrt{2 + \ln x}}$.

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tính phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$	$I=\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t=ax+b$	$I=\int_0^1 x(x+1)^{2016}dx$. Đặt $t=x-1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t=f(x)$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t=\ln x$ hoặc biểu thức chứa $\ln x$	$I=\int_1^e \frac{\ln xdx}{x(\ln x+1)}$. Đặt $t=\ln x+1$
5	Có e^xdx	$t=e^x$ hoặc biểu thức chứa e^x	$I=\int_0^{\ln 2} e^{2x}\sqrt{3e^x+1}dx$. Đặt $t=\sqrt{3e^x+1}$
6	Có $\sin xdx$	$t=\cos x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos xdx$. Đặt $t=\sin x$
7	Có $\cos xdx$	$t=\sin xdx$	$I=\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}dx$ Đặt $t=2\cos x+1$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t=\tan x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ Đặt $t=\tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t=\cot x$	$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}dx=\int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}dx$. Đặt $t=\cot x$

2) Đổi biến số dạng 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x=\varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ và $a\le\varphi(t)\le b$ với mọi $t\in[\alpha;\beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. $\sqrt{a^2-x^2}$: đặt $x=|a|\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
2. $\sqrt{x^2-a^2}$: đặt $x=\frac{|a|}{\sin t};\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$
3. $\sqrt{x^2+a^2}$: $x=|a|\tan t;\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x=a.\cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với *x* mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Ví dụ 4: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$.

b) $I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x=\sin t$ ta có $dx=\cos t dt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$. Vậy

$$I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt=\sin t\,|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

b) Đặt $x=\tan t$, ta có $dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\to t=0\\ x=1\to t=\frac{\pi}{4}\end{cases}$. Vậy

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=t\,|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

IV. Dạng 4: Phương pháp tính tích phân từng phần.

Định lí : Nếu $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx,$$

hay viết gọn là $\int_a^b udv=uv\,|_a^b-\int_a^b vdu$.

Các dạng cơ bản: Giả sử cần tính $I=\int_a^b P(x).Q(x)dx$

Dạng hàm	P(*x*): Đa thức Q(*x*): $\sin(kx)$ hay $\cos(kx)$	P(*x*): Đa thức Q(*x*): e^{kx}	P(*x*): Đa thức Q(*x*): $\ln(ax+b)$	P(x): Đa thức

				Q(x): $\frac{1}{\sin^2 x}$ **hay** $\frac{1}{\cos^2 x}$
Cách đặt	* $u = P(x)$ * *dv* là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân	* $u = P(x)$ * *dv* là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân	* $u = \ln(ax+b)$ * $dv = P(x)dx$	* $u = P(x)$ * *dv* là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân

Thông thường nên chú ý: "Nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ".

Ví dụ 5: Tính các tích phân sau :

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$ b) $I = \int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$. Do đó

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = (-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = x dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{x+1}dx \\ v = \frac{x^2-1}{2} \end{cases}$

$$I = \int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx = \left[\ln(x+1)\frac{x^2-1}{2}\right]\Bigg|_0^{e-1} - \frac{1}{2}\int_0^{e-1}(x-1)dx$$

$$= \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^{e-1}$$

$$= \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^2-4e+3}{2}$$

$$= \frac{e^2+1}{4}.$$

Bài tập áp dụng

1) $I = \int_0^1 (2x+2)e^x dx$. 2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x.\cos x dx$.

3) $I=\int_0^{2\pi} x^2.\sin\frac{x}{2}dx$.

4) $I=\int_0^1 (x+1)^2 e^{2x}dx$.

4.2 TÍCH PHÂN

B. BÀI TẬP

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Cho hai hàm số f, g liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b xf(x)dx = x\int_a^b f(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

D. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Câu 2. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

B. $\int_a^a f(x)dx = 1$.

C. $\int_a^a f(x)dx = -1$.

D. $\int_a^a f(x)dx = f(a)$.

Câu 3. Tích phân $\int_0^1 dx$ có giá trị bằng

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. 2.

Câu 4. Cho số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^a e^{x+1}dx = e^2-1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-1}^a e^{x+1}dx = e^{x+1}\Big|_{-1}^a = e^{a+1}-e$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương

$$e^{a+1}-1=e^2-1 \iff a=1.$$

Câu 5. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0;\pi]$ đạt giá trị bằng 0 ?

A. $f(x)=\cos 3x$.

B. $f(x)=\sin 3x$.

C. $f(x)=\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$.

D. $f(x)=\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Tính tích phân cho từng hàm số trong các đáp án:

- $\int_0^{\pi} \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^{\pi} = 0$,
- $\int_0^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = 2$,
- $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)dx = 4\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\left(\sqrt{2}-2\right)$,
- $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)dx = -4\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{2}$.

Vậy chọn $f(x) = \cos 3x$.

Câu 6. Tích phân nào trong các tích phân sau có giá trị **khác** 2?

A. $\int_1^{e^2} \ln x dx$. B. $\int_0^1 2dx$. C. $\int_0^{\pi} \sin x dx$. D. $\int_0^2 x dx$.

Hướng dẫn giải

Dù giải bằng máy tính hay làm tay, ta không nên thử tính lần lượt từng đáp án từ A đến D, mà nên chọn các tích phân đơn giản để thử trước. Ví dụ

- $\int_0^1 2dx = 2x|_0^1 = 2$,
- $\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2$
- $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi} = 2$,

nên nhận $\int_1^{e^2} \ln x dx$.

Câu 7. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx$?

A. $f(x) = \sin x$. B. $f(x) = \cos x$.

C. $f(x) = e^x$. D. $f(x) = x+1$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1: Phương pháp tự luận]

Tính lần lượt từng tích phân (cho đến khi nhận được kết quả đúng), ta được:

- $\int_{-1}^{1} \sin x dx = -\cos x|_{-1}^{1} = 0 = \int_{-2}^{2} \sin x dx$ → nhận,

- $\int_{-1}^{1}\cos xdx=\sin x|_{-1}^{1}=2\sin 1$, và $\int_{-2}^{2}\cos xdx=\sin x|_{-2}^{2}=2\sin 2$ → loại,
- $\int_{-1}^{1}e^{x}dx=e^{x}|_{-1}^{1}=e-e^{-1}$, và $\int_{-2}^{2}e^{x}dx=e^{x}|_{-2}^{2}=e^{2}-e^{-2}$ → loại,
- $\int_{-1}^{1}(x+1)dx=\left.\frac{(x+1)^{2}}{2}\right|_{-1}^{1}=2$, và $\int_{-2}^{2}(x+1)dx=\left.\frac{(x+1)^{2}}{2}\right|_{-2}^{2}=4$ → loại.

Vậy ta nhận đáp án $f(x)=\sin x$.

[Cách 2: Phương pháp tự luận]

Ta đã biết nếu f là hàm số lẻ và liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$ với mọi số thực a. Trong các lựa chọn ở đây, chỉ có hàm số $y=f(x)=\sin x$ là lẻ, nên đó là đáp án của bài toán.

[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{-1}^{1}\sin xdx-\int_{-2}^{2}\sin xdx$	0
$\int_{-1}^{1}\cos xdx-\int_{-2}^{2}\cos xdx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1}e^{x}dx-\int_{-2}^{2}e^{x}dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1}(x+1)dx-\int_{-2}^{2}(x+1)dx$	$\neq 0$

Vậy ta nhận đáp án $f(x)=\sin x$.

Câu 8. Tích phân $I=\int_{2}^{5}\frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

A. $\ln\frac{5}{2}$. B. $\frac{1}{3}\ln 3$. C. $3\ln 3$. D. $\ln\frac{2}{5}$.

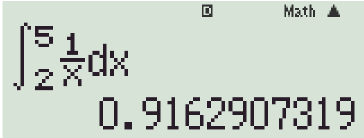
Hướng dẫn giải

[Cách 1: Phương pháp tự luận]

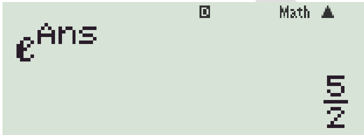
$$I=\int_2^5 \frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_2^5=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}.$$

[Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,91629...$



Bước 2: Lấy $e^{0,91629...}$ cho kết quả $\frac{5}{2}$ → chọn $\ln\frac{5}{2}$.



[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_2^5 \frac{dx}{x}-\ln\frac{5}{2}$	0
$\int_2^5 \frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_2^5 \frac{dx}{x}-3\ln 3$	$\neq 0$
$\int_2^5 \frac{dx}{x}-\ln\frac{2}{5}$	$\neq 0$

→ chọn $\ln\frac{5}{2}$.

Câu 9. Tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2}\ln 3$.   B. $2\ln 3$.   C. $2\ln\frac{1}{3}$.   D. $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1: Phương pháp tự luận]

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cot\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)dx$$

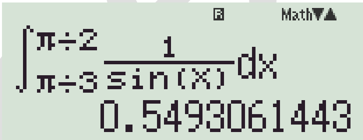
$$=\left[\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-\left[\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

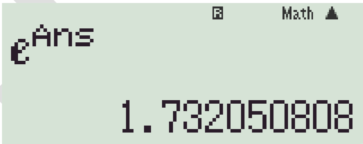
$$=\ln\sqrt{3}.$$

[Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,549306...$



Bước 2: Lấy $e^{0,549306...}$ cho kết quả $1,732050808...\approx\sqrt{3}$ → chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.



[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln 3$	0
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}-2\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}-2\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$

→ chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.

Nhận xét: Ở bài này cách làm bằng máy tính có vẻ nhanh hơn.

Câu 10. Nếu $\int\limits_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx = K-2e$ thì giá trị của K là

A. 10.   B. 9.   C. 11.   D. $12,5$.

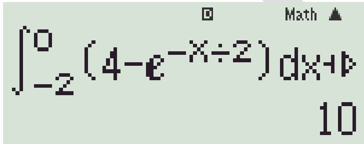
Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$K=\int\limits_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e=\left(4x+2e^{-x/2}\right)\Big|_{-2}^{0}+2e=2-(-8+2e)+2e=10.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int\limits_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e$ như hình bên, thu được giá trị $K=10$.



Câu 11. Tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx$ có giá trị bằng

A. $-\frac{2\ln 2}{3}$.   B. $\frac{2\ln 2}{3}$.   C. $-2\ln 2$.   D. Không xác định.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

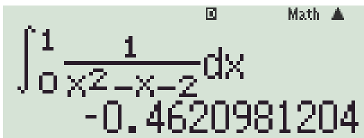
$$\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right]dx=\frac{1}{3}\left[\ln|x-2|-\ln|x+1|\right]\Big|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}.$$

Học sinh có thể áp dụng công thức $\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}dx=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$ để giảm **một** bước tính:

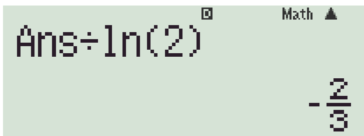
$$I=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $-0.4620981...$



Bước 2: Loại đáp án dương $\frac{2\ln 2}{3}$ và loại đáp án nhiễu "Không xác định".



Bước 3: Chia giá trị $-0.4620981...$ cho $\ln 2$, nhận được $-\dfrac{2}{3}$

→ chọn $-\dfrac{2\ln 2}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)dx=2$ và $\int_1^5 g(x)dx=-4$. Giá trị của $\int_1^5 [g(x)-f(x)]dx$ là

A. -6. B. 6. C. 2. D. -2.

Hướng dẫn giải

$$\int_1^5 [g(x)-f(x)]dx=\int_1^5 g(x)dx-\int_1^5 f(x)dx=-4-2=-6.$$

Câu 13. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x)dx=2$ thì tích phân $\int_0^3 [x-2f(x)]dx$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{5}{2}$. C. 5. D. 7.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^3 [x-2f(x)]dx=\int_0^3 xdx-2\int_0^3 f(x)dx=\frac{9}{2}-2\times 2=\frac{1}{2}.$$

Câu 14. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_1^5 f(x)dx=2$ và $\int_1^3 f(x)dx=7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng

A. -5. B. 5. C. 9. D. -9.

Hướng dẫn giải

$$\int_3^5 f(x)dx=\int_3^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx=-\int_1^3 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx=-7+2=-5.$$

Câu 15. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int_{-3}^{-2} \dfrac{1}{x}dx=(\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$. B. $\int_1^3 e^x dx=\left(e^x\right)\Big|_1^3$.

C. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos xdx=(\sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$. D. $\int_1^2 (x+1)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2$.

Hướng dẫn giải

Phép tính $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$ là sai. Phép tính đúng là $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx = (\ln|x|)\Big|_{-3}^{-2}$.

Câu 16. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

A. $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$.

B. $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a;b)$.

C. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x) = F(x) + 5$ cũng thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Câu 17. Xét hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$.

Câu 18. Xét hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $f(x) \geq m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq m(a-b)$.

B. Nếu $f(x) \geq m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$.

C. Nếu $f(x) \leq M \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

D. Nếu $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a;b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b)$.

Hướng dẫn giải

Mệnh đề "Nếu $f(x) \geq m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq m(a-b)$" sai, mệnh đề đúng phải là

"Nếu $f(x) \geq m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$".

Câu 19. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a;b]$. Xét các khẳng định sau:

I. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

II. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

III. $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$.

IV. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Trong các khẳng định trên, có bao nhiêu khẳng định **sai**?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Các công thức $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ và $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$ là sai.

Câu 20. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với giá trị của tích phân nào trong các tích phân dưới đây?

A. $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$. B. $3\int_0^{3\pi} \sin x dx$.

C. $\int_0^2 \left(x^2+x-3\right)dx$. D. $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Tính rõ từng phép tính tích phân để tìm ra kết quả đúng (Chỉ tính đến khi nhận được kết quả đúng thì dừng lại):

- $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^{\ln\sqrt{10}} = \frac{e^{2\ln\sqrt{10}}-1}{2} = \frac{9}{2}$,
- $3\int_0^{3\pi} \sin x dx = -3\cos x|_0^{3\pi} = 6$,
- $\int_0^2 (x^2+x-3)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x\right)\right|_0^2 = \frac{8}{3}+2-6 = -\frac{4}{3}$,
- $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+\pi)|_0^{\pi} = \frac{1}{3}(\sin 4\pi - \sin\pi) = 0$.

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$	0
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{3\pi} \sin xdx$	$-\frac{3}{2}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^2 (x^2+x-3)dx$	$\frac{35}{6}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$	$\frac{9}{2}$

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Với mọi hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

B. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[-3;3]$, luôn có $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$.

C. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$, sao cho $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ thì $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a;b]$.

D. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[1;5]$ thì $\int_1^5 [f(x)]^2\,dx = \left.\frac{[f(x)]^3}{3}\right|_1^5$.

Hướng dẫn giải

Vì $d(-x) = (-1)dx$ nên $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(x)(-1)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx$.

B. Nếu $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

C. Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$.

D. Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

Hướng dẫn giải

- Hàm số $y = x^3 - \frac{x}{2}$ thỏa $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, nhưng nó là hàm lẻ trên $[-1;1]$.
- Hàm số $y = x^2 - \frac{1}{3}$ thỏa $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, nhưng nó làm hàm chẵn trên $[-1;1]$.
- Còn khi f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ và suy ra

$$\int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)(-1)dx = -\int_0^1 f(x)d(-x)$$
$$= -\int_0^1 f(-x)d(-x) = -\int_0^{-1} f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt.$$

Câu 23. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = x^6\sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_1^2 x^6\sin^5 x\,dx$ có giá trị bằng

A. $F(2) - F(1)$.   B. $-F(1)$.   C. $F(2)$.   D. $F(1) - F(2)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a;b]$, ta có $\int_{1}^{2} x^6 \sin^5 x dx = F(2) - F(1)$.

Câu 24. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai số thực $a < b$. Nếu $\int_{a}^{b} f(x)dx = \alpha$ thì tích phân $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{\alpha}{2}$. B. 2α. C. α. D. 4α.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$ và

x	$a/2$	$b/2$
t	a	b

Vậy $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{a/2}^{b/2} f(2x)2dx = \frac{1}{2}\int_{a}^{b} f(t)dt = \frac{\alpha}{2}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Phương pháp tự luận tốt hơn cả, nhưng nếu học sinh không nắm rõ, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[0;1]$ và tính toán.

Ví dụ $f(x) = x$ với $x \in [0;1]$. Khi đó

$$\alpha = \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} xdx = \frac{1}{2},$$

suy ra

$$\int_{0}^{1/2} f(2x)dx = \int_{0}^{1/2} 2xdx = \frac{1}{4} = \frac{\alpha}{2}.$$

Câu 25. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = x^3 \sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó tích phân $\int_{1}^{2} 81x^3 \sin^5 3xdx$ có giá trị bằng

A. $F(6) - F(3)$. B. $3[F(6) - F(3)]$. C. $3[F(2) - F(1)]$. D. $F(2) - F(1)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$ và đổi cận

x	1	2
t	3	6

Vậy $\int_1^2 81x^3\sin^5 3xdx = \int_1^2 (3x)^3(\sin^5 3x)3dx = \int_3^6 t^3\sin^5 tdt = F(6)-F(3)$.

Câu 26. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx = 6$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx$ là

A. 3. B. 6. C. -3. D. -6.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 2\sin x \Rightarrow dt = 2\cos xdx$ và

x	0	$\pi/2$
t	0	2

Vậy $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx = \int_0^2 \frac{f(t)}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = 3$.

Câu 27. Bài toán tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t = \ln x + 1$, suy ra $dt = \frac{1}{x}dx$ và

x	1	e
t	1	2

II. $I = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx = \int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt$

III. $I = \int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt = \left(\sqrt{t^5} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right)\Big|_1^2 = 1+3\sqrt{2}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai ở Bước III. B. Sai từ Bước II. C. Sai từ Bước I. D. Bài giải đúng.

Hướng dẫn giải

Bước III sai. Phép tính đúng là $I=\int\limits_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt=\left(\frac{2}{5}\sqrt{t^5}-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\Big|_1^2=\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

Câu 28. Xét tích phân $I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$. Thực hiện phép đổi biến $t=\cos x$, ta có thể đưa I về dạng nào sau đây

A. $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$.

B. $I=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$.

C. $I=-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$.

D. $I=-\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$.

Hướng dẫn giải

Ta có $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $t=\frac{1}{2}$. Vậy

$$I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}dx=-\int\limits_1^{1/2}\frac{2t}{1+t}dt=\int\limits_{1/2}^{1}\frac{2t}{1+t}dt.$$

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào luôn đúng?

A. $\int\limits_a^b |f(x)|dx\ge\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$.

B. $\int\limits_a^b f(x)dx\ge\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

C. $\int\limits_a^b |f(x)|dx>\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$.

D. $\int\limits_a^b f(x)dx>\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Câu 30. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_0^1 (1+x)^x dx=0$.

B. $\int\limits_0^1 \sin(1-x)dx=\int\limits_0^1 \sin xdx$.

C. $\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin xdx$.

D. $\int\limits_{-1}^{1}x^{2017}(1+x)dx=\frac{2}{2019}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1: Tính trực tiếp các tích phân]

- Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow\int\limits_0^1\sin(1-x)dx=-\int\limits_1^0\sin tdt=\int\limits_0^1\sin tdt$
- Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}dx\Rightarrow\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\int\limits_0^{\pi/2}2\sin tdt$

- $\int_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx = \left(\frac{x^{2018}}{2018}+\frac{x^{2019}}{2019}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{1^{2018}}{2018}+\frac{1^{2019}}{2019}\right)-\left(\frac{(-1)^{2018}}{2018}+\frac{(-1)^{2019}}{2019}\right)=\frac{2}{2019}$

Vậy $\int_{0}^{1}(1+x)^{x}dx=0$ sai.

[Cách 2: Nhận xét tích phân]

Ta thấy $(1+x)^{x}\geq 1$ với mọi $x\in[0;1]$ nên $\int_{0}^{1}(1+x)^{x}dx\geq\int_{0}^{1}1dx=1$, vậy "$\int_{0}^{1}(1+x)^{x}dx=0$" là khẳng định sai.

[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	**Kết quả**
$\int_{0}^{1}(1+x)^{x}dx$	>0
$\int_{0}^{1}\sin(1-x)dx-\int_{0}^{1}\sin xdx$	0
$\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx-2\int_{0}^{\pi/2}\sin xdx$	0
$\int_{-1}^{1}x^{2017}(1+x)dx-\frac{2}{2019}$	0

suy ra $\int_{0}^{1}(1+x)^{x}dx=0$ là khẳng định sai.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ lẻ và liên tục trên đoạn $[-2;2]$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_{-2}^{2}f(x)dx=0$.

B. $\int_{-2}^{2}f(x)dx=2\int_{0}^{2}f(x)dx$.

C. $\int_{-2}^{2}f(x)dx=2\int_{-2}^{0}f(x)dx$.

D. $\int_{-2}^{2}f(x)dx=-2\int_{0}^{2}f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Với hàm số f bất kỳ và số thực dương a, ta luôn nằm lòng 2 tính chất sau đây:

- Nếu f là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,
- Nếu f là hàm số chẵn trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Vậy trong bài này ta chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nếu học sinh không nắm rõ hai tính chất kể trên, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[-2;2]$ và tính toán. Ví dụ $f(x) = x$ với $x \in [-2;2]$. Khi đó

- $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_{0}^{2} f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq -2\int_{0}^{2} f(x)dx$.

Vậy chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

Câu 32. Bài toán tính tích phân $I = \int_{-2}^{1} (x+1)^2 dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t = (x+1)^2$, suy ra $dt = 2(x+1)dx$,

II. Từ đây suy ra $\frac{dt}{2(x+1)} = dx \Rightarrow \frac{dt}{2\sqrt{t}} = dx$. Đổi cận

x	-2	1
t	1	4

III. Vậy $I = \int_{-2}^{1} (x+1)^2 dx = \int_{1}^{4} \frac{t}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4 = \frac{7}{3}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ Bước II. B. Sai ở Bước III. C. Sai từ Bước I. D. Bài giải đúng.

Hướng dẫn giải

Khi đặt $t = (x+1)^2$ với $-2 \le x \le 1$ thì không suy ra $\sqrt{t} = x+1$ được, vì $x+1$ có thể bị âm khi $-2 \le x \le -1$.

Câu 33. Một học sinh được chỉ định lên bảng làm 4 bài toán tích phân. Mỗi bài giải đúng được 2,5 điểm, mỗi bài giải sai (sai kết quả hoặc sai bước tính nguyên hàm) được 0 điểm. Học sinh đã giải 4 bài toán đó như sau:

Bài	Đề bài	Bài giải của học sinh
1	$\int_0^1 e^{x^2} xdx$	$\int_0^1 e^{x^2} xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2} d\left(x^2\right) = \frac{e^{x^2}}{2}\Big\|_0^1 = \frac{e-1}{2}$
2	$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2} dx$	$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2} dx = \left[\ln\|x^2-x-2\|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 2 = 0$
3	$\int_0^{\pi} \sin 2x \cos xdx$	Đặt $t = \cos x$, suy ra $dt = -\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=\pi$ thì $t=-1$. Vậy $\int_0^{\pi} \sin 2x \cos xdx = 2\int_0^{\pi} \sin x \cos^2 xdx = -2\int_1^{-1} t^2 dt = \frac{2t^3}{3}\Big\|_{-1}^1 = \frac{4}{3}$

4	$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx$	$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx = \int_1^e [1+(4-2e)\ln x]d(\ln x) = \left[x+(4-2e)\ln^2 x\right]\Big\|_1^e$ $=3-e$

Số điểm mà học sinh này đạt được là bao nhiêu?

A. 5,0 điểm. B. 2,5 điểm. C. 7,5 điểm. D. 10,0 điểm.

Hướng dẫn giải

Bài toán 2 giải sai. Cách giải đúng là

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln 2$$

Bài toán 4 ra kết quả đúng, nhưng cách tính nguyên hàm sai hoàn toàn. Lời giải đúng là:

$$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx = \int_1^e [1+(4-2e)\ln x]d(\ln x) = \left[\ln x+(2-e)\ln^2 x\right]\Big|_1^e = 3-e$$

[Kinh nghiệm]

Kết quả đúng thì chưa chắc bài giải đúng.

Câu 34. Cho hai hàm số liên tục f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi F và G lần lượt là một nguyên hàm của f và g trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào sau đây **luôn đúng**?

A. $\int_a^b f(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]\big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)G(x)dx = [F(x)g(x)]\big|_a^b - \int_a^b F(x)G(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)G(x)dx = [f(x)g(x)]\big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]\big|_a^b - \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Câu 35. Tích phân $I = \int_{-2}^0 xe^{-x}dx$ có giá trị bằng

A. $-e^2-1$. B. $3e^2-1$. C. $-e^2+1$. D. $-2e^2+1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

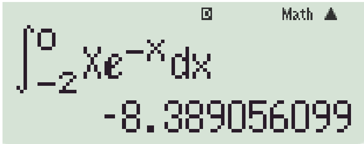
Sử dụng tích phân từng phần, ta được

$$I=\int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$$

$$=-\int_{-2}^{0} xd\left(e^{-x}\right)=-\left[\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0} e^{-x}dx\right]=-\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}+\int_{-2}^{0} e^{-x}dx=-\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(e^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}=-e^2-1.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$ như hình bên, thu được kết quả như hình bên. Loại được đáp án $3e^2-1$. Sau đó thử từng đáp án còn lại để tìm ra kết quả.



Câu 36. Ta đã biết công thức tích phân từng phần $\int_{a}^{b} F(x)g(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b} f(x)G(x)dx$, trong đó F và G là các nguyên hàm của f và g. Trong các biến đổi sau đây, sử dụng công thức tích phân từng phần ở trên, biến đổi nào là **sai**?

A. $\int_{0}^{\pi} x\sin xdx=\left(x\cos x\right)\Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\cos xdx$, trong đó $F(x)=x$, $g(x)=\sin x$.

B. $\int_{0}^{1} xe^{x}dx=\left(xe^{x}\right)\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1} e^{x}dx$, trong đó $F(x)=x$, $g(x)=e^{x}$.

C. $\int_{1}^{e}(\ln x)xdx=\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_{1}^{e}-\frac{1}{2}\int_{1}^{e} xdx$, trong đó $F(x)=\ln x$, $g(x)=x$.

D. $\int_{0}^{1} x2^{x+1}dx=\left(x\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right)\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{2^{x+1}}{\ln 2}dx$, trong đó $F(x)=x$, $g(x)=2^{x+1}$.

Câu 37. Tích phân $\int_{0}^{\pi} x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ có giá trị bằng

A. $-\frac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

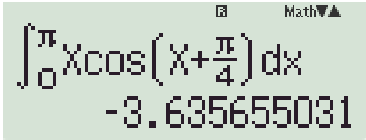
$$\int_{0}^{\pi} x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\left[x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$=\pi\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int_0^{\pi} x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)dx$ như hình bên, thu được kết quả như hình bên. Loại được các đáp án dương $\dfrac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$ và $\dfrac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. Sau đó thử từng đáp án còn lại để tìm ra kết quả.



Câu 38. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[0;2]$. Biết rằng $F(0)=0$, $F(2)=1$, $G(0)=-2$, $G(2)=1$ và $\int_0^2 F(x)g(x)dx=3$. Tích phân $\int_0^2 f(x)G(x)dx$ có giá trị bằng

A. -2. B. 0. C. 3. D. -4.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^2 f(x)G(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_0^2-\int_0^2 F(x)g(x)dx$$
$$=F(2)G(2)-F(0)G(0)-\int_0^2 F(x)g(x)dx$$
$$=1\times1-0\times(-2)-3$$
$$=-2.$$

Câu 39. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1$, $F(2)=4$, $G(1)=\dfrac{3}{2}$, $G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx=\dfrac{67}{12}$. Tích phân $\int_1^2 F(x)g(x)dx$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{11}{12}$. B. $-\dfrac{145}{12}$. C. $-\dfrac{11}{12}$. D. $\dfrac{145}{12}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_1^2 F(x)g(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]\Big|_1^2-\int_1^2 f(x)G(x)dx$$
$$=F(2)G(2)-F(1)G(1)-\int_1^2 f(x)G(x)dx$$
$$=4\times2-1\times\frac{3}{2}-\frac{67}{12}$$
$$=\frac{11}{12}.$$

Câu 40. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a<b$ và $\int_a^b x\sin xdx=\pi$, đồng thời $a\cos a=0$ và $b\cos b=-\pi$. Tích phân $\int_a^b \cos xdx$ có giá trị bằng

A. 0. B. π. C. $-\pi$. D. $\frac{145}{12}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_a^b x\sin xdx=-\left[x\cos x\right]\Big|_a^b+\int_a^b \cos xdx$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\int_a^b \cos xdx&=\left[x\cos x\right]\Big|_a^b+\int_a^b x\sin xdx\\&=b\cos b-a\cos a+\pi\\&=-\pi-0+\pi\\&=0.\end{aligned}$$

Câu 41. Cho tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$. Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}$, khi đó I bằng

A. $I=-\int_1^0 u^2du$. B. $I=\int_1^0 u^2du$. C. $I=\int_1^0 \frac{u^2}{2}du$. D. $I=-\int_0^1 u^2du$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}\Rightarrow u^2=1-\ln x\ \Rightarrow\frac{dx}{x}=-2udu$. Với $x=1\Rightarrow u=1, x=e\Rightarrow u=0$. Khi đó

$$I=-\int_1^0 u^2du.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm máy tính để tính $\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$

Bước 2: Bấm SHIFT STO A để lưu vào biến A.

Bước 3: Bấm $A-\left(-\int_1^0 u^2du\right)=0$. Vậy đáp án là $I=-\int_1^0 u^2du$.

Câu 42. Tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12}dx$ có giá trị bằng

A. $1+25\ln 2-16\ln 3$.

B. $1+2\ln 2-6\ln 3$.

C. $3+5\ln 2-7\ln 3$.

D. $5\ln 2-6\ln 3$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int\limits_1^2\left(1+\dfrac{16}{x-4}-\dfrac{9}{x-3}\right)dx=\left(x+16\ln|x-4|-9\ln|x-3|\right)\Big|_1^2=1+25\ln 2-16\ln 3$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính

$$\int\limits_1^2\frac{x^2}{x^2-7x+12}dx-(1+25\ln 2-16\ln 3)$$

được đáp số là 0.

Câu 43. Tích phân $I=\int\limits_1^2 x^5dx$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{21}{2}$.

B. $\dfrac{32}{3}$.

C. $\dfrac{16}{3}$.

D. $\dfrac{19}{3}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int\limits_1^2 x^5dx=\dfrac{x^6}{6}\Big|_1^2=\dfrac{21}{2}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $\dfrac{21}{2}$.

Câu 44. Tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{xdx}{(x+1)^3}$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{1}{8}$.

B. $\dfrac{1}{6}$.

C. $-\dfrac{1}{7}$.

D. 12.

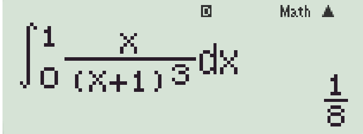
Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $\dfrac{x}{(x+1)^3}=\dfrac{x+1-1}{(x+1)^3}=(x+1)^{-2}-(x+1)^{-3}\Rightarrow I=\int\limits_0^1\left[(x+1)^{-2}-(x+1)^{-3}\right]dx=\dfrac{1}{8}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $\frac{1}{8}$.



Câu 45. Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-x)\sin xdx$. Đặt $u=2-x,\ dv=\sin xdx$ thì I bằng

A. $-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

B. $-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

C. $(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

D. $(2-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases}u=2-x\\ dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-dx\\ v=-\cos x\end{cases}$. Vậy $I=-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

Câu 46. Tích phân $\int_0^1\frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx$ có giá trị bằng với tích phân nào sau đây

A. $\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. B. $\int_1^3\frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. C. $\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^4}dt$. D. $\frac{3}{2}\int_1^4\frac{(t-1)^3}{t^4}dt$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $t=1+x^2\Rightarrow dt=2xdx$. Vậy

$$I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^5}dt=\frac{1}{4}.\frac{1}{2^5}=\frac{1}{128}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập vào máy tính các phép trừ tích phân, đến khi đạt giá trị bằng 0 thì ngừng:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^1\frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(x-1)^3}{x^5}dx$	0
$\int_0^1\frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx-\int_1^3\frac{(x-1)^3}{x^5}dx$	$\neq 0$
$\int_0^1\frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(x-1)^3}{x^4}dx$	$\neq 0$
$\int_0^1\frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx-\frac{3}{2}\int_1^4\frac{(x-1)^3}{x^4}dx$	$\neq 0$

Câu 47. Tích phân $I=\int_1^{\sqrt[4]{3}}\frac{1}{x(x^4+1)}dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$.　　　B. $\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$.　　　C. $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$.　　　D. $\ln\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

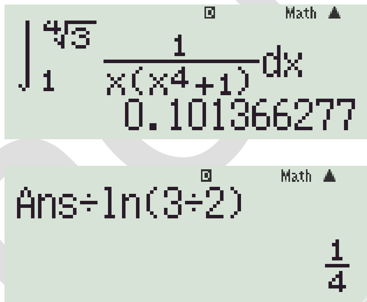
[Phương pháp tự luận]

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$. Vậy

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính nhập tích phân như hình bên, thu được giá trị $0{,}101366277...$



Bước 2: Chia giá trị trên cho $\ln\frac{3}{2}$, thu được $\frac{1}{4}$ → chọn $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$.

Câu 48. Cho hai tích phân $I = \int_0^2 x^3dx$, $J = \int_0^2 xdx$. Tìm mối quan hệ giữa I và J.

A. $I.J = 8$.　　　B. $I.J = \frac{32}{5}$.

C. $I - J = \frac{128}{7}$.　　　D. $I + J = \frac{64}{9}$.

Hướng dẫn giải

$I = \int_0^2 x^3dx = 4$ và $J = \int_0^2 xdx = 2$, suy ra $I.J = 8$.

Câu 49. Cho số thực a thỏa mãn $\int_1^a e^{x+1}dx = e^4 - e^2$, khi đó a có giá trị bằng

A. 3.　　　B. -1.　　　C. 0.　　　D. 2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $\int_1^a e^{x+1}dx = e^{x+1}\Big|_1^a = e^{a+1} - e^2 = e^4 - e^2 \Rightarrow a = 3$.

[Cách 1: Phương pháp trắc nghiệm]

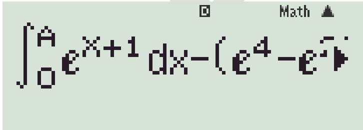
Thế từng đáp án vào và bấm máy

$\int_1^3 e^{x+1}dx-\left(e^4-e^2\right)=0$ $\qquad$ $\int_1^{-1} e^{x+1}dx-\left(e^4-e^2\right)\approx -53,5981$

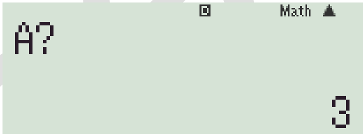
$\int_1^0 e^{x+1}dx-\left(e^4-e^2\right)\approx -51,8798$ $\qquad$ $\int_1^2 e^{x+1}dx-\left(e^4-e^2\right)\approx -34,5126$.

[Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm]

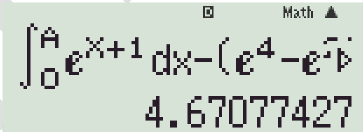
Bước 1: Nhập màn hình phép tính $\int_1^A e^{x+1}dx-\left(e^4-e^2\right)$. Nhấn CALC.



Bước 2: Máy hỏi X? → Chọn ALPHA X



Bước 3: Máy hỏi A? → Chọn lần lượt các giá trị trong các đáp án rồi nhấn dấu =. Đến khi phép tính được kết quả bằng 0 là nhận. Ví dụ, nhập A = 3 như hình bên thì cho kết quả $4,67077...$ → loại.



Câu 50. Tích phân $\int_0^2 ke^x dx$ (với k là hằng số) có giá trị bằng

A. $k(e^2-1)$. $\qquad$ B. e^2-1. $\qquad$ C. $k(e^2-e)$. $\qquad$ D. e^2-e.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_0^2 ke^x dx = ke^x\Big|_0^{\pi} = k(\mathrm{e}^2-1)$.

Câu 51. Với hằng số k, tích phân nào sau đây có giá trị khác với các tích phân còn lại ?

A. $\int_0^{\frac{2}{3}} ke^{2x}dx$. $\qquad$ B. $\int_0^2 ke^x dx$.

C. $\int_0^{\frac{2}{3}} 3ke^{3x}dx$. $\qquad$ D. $\int_0^1 k(\mathrm{e}^2-1)dx$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\int_0^{\frac{2}{3}} ke^{2x}dx = \frac{k}{2}e^{2x}\Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{k}{2}(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-1), \qquad \int_0^2 ke^x dx = ke^x\Big|_0^{\pi} = k(\mathrm{e}^2-1),$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}} 3ke^{3x}dx = ke^{3x}\Big|_0^{\frac{2}{3}} = k(e^2-1), \qquad \int_0^1 k(e^2-1)dx = kx(e^2-1)\Big|_0^1 = k(e^2-1).$$

Câu 52. Với số thực k, xét các khẳng định sau:

(I) $\int_{-1}^{1} dx = 2$; (II) $\int_{-1}^{1} kdx = 2k$; (III) $\int_{-1}^{1} xdx = 2x$; (IV) $\int_0^1 3kx^2dx = 2k$.

Số khẳng định đúng là

A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 53. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)dx = -7$ và $\int_1^5 g(x)dx = 5$ và $\int_1^5 [g(x) - kf(x)]dx = 19$ Giá trị của k là:

A. 2. B. 6. C. 2. D. -2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_1^5 [g(x) - kf(x)]dx = 19 \Leftrightarrow \int_1^5 g(x)dx - k\int_1^5 f(x)dx = 19 \Leftrightarrow 5 - k(-7) = 19 \Leftrightarrow k = 2$.

Câu 54. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_1^5 2f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng:

A. -6. B. 5. C. 9. D. -9.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $\int_3^5 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -7 + \frac{2}{2} = -6$.

Câu 55. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 4$ và tích phân $\int_1^2 [kx - f(x)]dx = -1$ giá trị k bằng

A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. 5. D. 7.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_1^2 [kx - f(x)]dx = -1 \Leftrightarrow k\int_1^2 xdx - \int_1^2 f(x)dx = k\frac{3}{2} - 4 = -1 \Leftrightarrow k = 2$.

Câu 56. Tích phân $\int_1^e (2x-5)\ln x dx$ bằng

A. $(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e (x-5)dx$.

B. $(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e+\int\limits_1^e (x-5)dx$.

C. $-(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e (x-5)dx$.

D. $(x-5)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e (x^2-5x)dx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=(2x-5)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=x^2-5x \end{cases}$. Vậy $\int\limits_1^e (2x-5)\ln xdx=(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e (x-5)dx$.

Câu 57. Tích phân $\mathrm{I}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 2xdx$ có giá trị bằng

A. $\frac{\pi}{8}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. $\frac{3\pi}{8}$.

D. $\frac{-5\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\cos 2xdx=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}(x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Chuyển chế độ radian: SHIFT MODE 4.

Bấm máy $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 2xdx-\frac{\pi}{8}=0$. Vậy đáp án là $\frac{\pi}{8}$.

Câu 58. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$ có giá trị bằng

A. 2.

B.3

C.4

D.1

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}=\frac{4\sin^3 x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=4\sin x-4\sin x\cos x=4\sin x-2\sin 2x \Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x-2\sin 2x)dx=2.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Chuyển chế độ radian: SHIFT MODE 4

Bấm máy tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx - 2 = 0$. Vậy đáp án là 2.

Câu 59. Tích phân $I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx$ có giá trị bằng

A. $4\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2} dx = \int\limits_0^{2\pi} \left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| dx = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| dx$$

$$= \sqrt{2}\left[\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dx - \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dx\right]$$

$$= 4\sqrt{2}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx - 4\sqrt{2}$ được đáp số là 0. Vậy đáp án là $4\sqrt{2}$.

Câu 60. Tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx$ có giá trị bằng

A. $\ln 2 - \frac{3}{8}$. B. $\ln 2 - 2$. C. $\ln 2 - \frac{3}{4}$. D. $\ln 3 - \frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x.\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow I = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{1-u^2}{u}du = \ln 2 - \frac{3}{8}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx - \left(\ln 2 - \frac{3}{8}\right)$ được đáp số là 0. Vậy đáp án là $\ln 2 - \frac{3}{8}$.

Câu 61. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\cos^4 x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. $\frac{3\pi}{16}$. B. -2. C. $\ln 2-\frac{3}{4}$. D. $\ln 3-\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $x=-t \Rightarrow \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)(-dt)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$

$$\Rightarrow 2\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]dx=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx$$

$$\Rightarrow I=\frac{3\pi}{16}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx-\frac{3\pi}{16}$ được đáp số là 0. Vậy đáp án là $\frac{3\pi}{16}$.

Câu 62. Nếu $\int\limits_{-2}^{0}\left(5-e^{-x}\right)dx=K-e^2$ thì giá trị của K là

A. 11. B. 9. C. 7. D. $12,5$.

Hướng dẫn giải

$$K=\int\limits_{-2}^{0}\left(5-e^{-x}\right)dx+e^2=\left(5x+e^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}+e^2=11.$$

Câu 63. Cho tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos x}.\sin xdx$. Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1}$. Khi đó I bằng

A. $\frac{2}{9}u^3\Big|_1^2$. B. $\frac{2}{3}\int\limits_0^2 u^2du$. C. $\frac{2}{3}\int\limits_1^3 u^2du$. D. $\int\limits_1^3 u^2du$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1}\Rightarrow 2udu=-3\sin xdx$. Khi $x=0\Rightarrow u=2;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$. Khi đó

$$I=\frac{2}{3}\int_1^2 u^2du=\frac{2}{9}u^3\Big|_1^2.$$

Câu 64. Tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{8\ln x+1}}{x}dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{13}{6}$.　　B. -2.　　C. $\ln 2-\frac{3}{4}$.　　D. $\ln 3-\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $t=\sqrt{8\ln x+1}\Rightarrow tdt=\frac{4}{x}dx$. Với $x=1\Rightarrow t=1,\ x=e\Rightarrow t=3$. Vậy $I=\frac{1}{4}\int_1^3 t^2dt=\frac{t^3}{12}\Big|_1^3=\frac{13}{6}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $I=\int_1^e \frac{\sqrt{8\ln x+1}}{x}dx$ được đáp số là $\frac{13}{6}$. Vậy chọn đáp án $\frac{13}{6}$.

Câu 65. Tích phân $\int_{-1}^5 \left|x^2-2x-3\right|dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{64}{3}$.　　B. 0.　　C. 7.　　D. $12,5$.

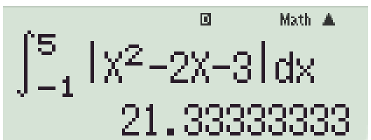
Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$\begin{aligned}\int_{-1}^5 \left|x^2-2x-3\right|dx&=\int_{-1}^5 \left|(x-3)(x+1)\right|dx\\&=-\int_{-1}^3\left(x^2-2x-3\right)dx+\int_3^5\left(x^2-2x-3\right)dx\\&=-\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{-1}^3+\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_3^5\\&=\frac{64}{3}.\end{aligned}$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng chức năng “SHIFT hyp” để hiển thị dấu trị tuyệt đối, nhập tích phân như hình bên và nhận được giá trị $21,3333333$ → chọn đáp án $\frac{64}{3}$.



Câu 66. Tìm a để $\int_1^2 (3-ax)dx = -3$?

A. 4. B. 9. C. 7. D. 2.

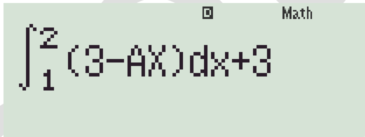
Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

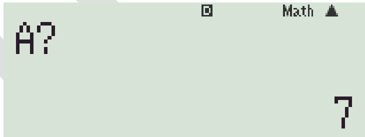
$$\int_1^2 (3-ax)dx = -3 \Leftrightarrow \left[3x - \frac{a}{2}x^2\right]\Bigg|_1^2 = -3 \Leftrightarrow a = 4.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

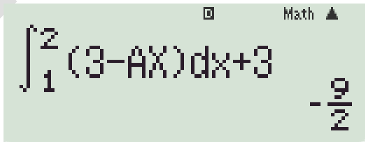
Bước 1: Nhập màn hình phép tính $\int_1^2 (3-Ax)dx+3$. Nhấn CALC.



Bước 2: Máy hỏi X? → Chọn ALPHA X



Bước 3: Máy hỏi A? → Chọn lần lượt các giá trị trong các đáp án rồi nhấn dấu =. Đến khi phép tính được kết quả bằng 0 là nhận. Ví dụ, nhập $A=7$ như hình bên thì cho kết quả $-\frac{9}{2}$ → loại.



Câu 67. Tất cả các giá trị của số k sao cho $\int_2^5 k^2(5-x^3)dx = -549$ là

A. ± 2 B. 2. C. -2 . D. 5.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

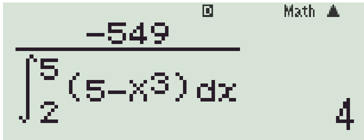
$$\int_2^5 k^2(5-x^3)dx = -549 \Leftrightarrow k^2\left(5x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_2^5 = -549$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{-549}{\frac{-549}{4}} = 4$$

$$\Leftrightarrow k = \pm 2.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập biểu thức $\dfrac{-549}{\int_2^5 (5-x^3)dx}$ vào máy tính như hình bên,



thu được kết quả bằng 4. Đó là giá trị của k^2. Suy ra $k=\pm 2$.

Câu 68. Tích phân $\int_2^3 \dfrac{x^2-x+4}{x+1}dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}+6\ln\dfrac{4}{3}$. B. $\dfrac{1}{3}+6\ln\dfrac{4}{3}$. C. $\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{4}{3}$. D. $\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_2^3 \frac{x^2-x+4}{x+1}dx=\int_2^3\left(x-2+\frac{6}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-2x+6\ln|x+1|\right)\Big|_2^3=\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm máy tính để tính $\int_2^3 \dfrac{x^2-x+4}{x+1}dx$

Bước 2: Bấm SHIFT STO A để lưu vào biến A.

Bước 3: Bấm $A-\left(\dfrac{1}{2}+6\ln\dfrac{4}{3}\right)=0$. Vậy đáp án là $\dfrac{1}{2}+6\ln\dfrac{4}{3}$.

Câu 69. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. 2. B. -7. C. 7. D. -2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ (1)

Tính $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$. Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$.

Thay vào (1), ta được $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(-x)+f(x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos 2x)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2$.

Câu 70. Tìm m để $\int\limits_m^2 (3-2x)^4 dx = \frac{122}{5}$?

A. 0. B. 9. C. 7. D.2.

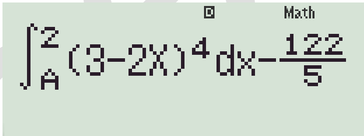
Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$I = \int\limits_m^2 (3-2x)^4 dx = -\frac{1}{10}(3-2x)^5\Big|_m^2 = -\frac{1}{10}\left[(3-4)^5 - (3-2m)^5\right] = \frac{122}{5} \Rightarrow m = 0.$$

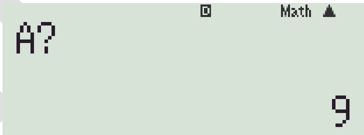
[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Nhập màn hình phép tính $\int\limits_A^2 (3-2x)^4 dx - \frac{122}{5}$.

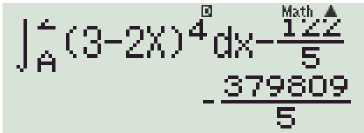


Nhấn CALC.

Bước 2: Máy hỏi X? → Chọn ALPHA X



Bước 3: Máy hỏi A? → Chọn lần lượt các giá trị trong các đáp án rồi nhấn dấu =. Đến khi phép tính được kết quả bằng 0 là nhận. Ví dụ, nhập $A=9$ như hình bên thì cho kết quả $-\frac{379809}{5}$ → loại.



4.2 TÍCH PHÂN

I. VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ là

A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$. Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Vậy

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{|\cos t|} dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 2. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ là

A. $I=\frac{\pi}{4}$. B. $I=\frac{3\pi}{4}$. C. $I=\frac{\pi}{2}$. D. $I=\frac{5\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=(\tan^2 x+1)dt$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, suy ra $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 t+1}{1+\tan^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}$.

Câu 3. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ là

A. $I=\frac{\pi}{12}$. B. $I=\frac{\pi}{6}$. C. $I=\frac{3\pi}{12}$. D. $I=\frac{5\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{1+(x+1)^2}$. Đặt $x+1=\tan t$

Câu 4. Tích phân $I=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx$ có giá trị là

A. $\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$. B. $\frac{4}{3}\sqrt{7}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

C. $\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{3}$. D. $\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $t=x^3+5\Rightarrow dt=3x^2dx$. Khi $x=0$ thì $t=5$; khi $x=1$ thì $t=6$.

Vậy $I=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx=\int_5^6\sqrt{t}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int_5^6(t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{3}\frac{(t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_5^6=\frac{2}{9}t\sqrt{t}\Bigg|_5^6=\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

Câu 5. Tích phân $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$ có giá trị là

A. π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = 2\sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi x = 0 thì t = 0. Khi $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Từ $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$

Vậy $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \pi$.

Câu 6. Tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ có giá trị là

A. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. B. $\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = t^2-1 \Rightarrow dx = \frac{tdt}{x}$.

Vậy $I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Câu 7. Tích phân $I = \int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}dx$ có giá trị là

A. $-\frac{9}{28}$. B. $-\frac{3}{28}$. C. $\frac{3}{28}$. D. $\frac{9}{28}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x+1 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$.

Vậy $I = \int_0^1 3t^3\left(t^3-1\right)dt = 3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = -\frac{9}{28}$.

Câu 8. Giá trị của tích phân $I = 2\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ là

A. $\frac{16-11\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{16-11\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{16-10\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{16-10\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$.

Ta có $I=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^3}.2tdt=2\int_1^{\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2dt=2\left(\frac{t^3}{3}-2t-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{16-11\sqrt{2}}{3}$

Câu 9. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^6dx$ là

A. $\frac{1}{168}$. B. $\frac{1}{167}$. C. $\frac{1}{166}$. D. $\frac{1}{165}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1-x^3\Rightarrow dt=-3x^2dx\Rightarrow dx=\frac{-dt}{3x^2}$, ta có

$$I=\frac{1}{3}\int_0^1 t^6\left(1-t\right)dt=\frac{1}{3}\int_0^1\left(t^6-t^7\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^8}{8}\right)=\frac{1}{168}.$$

Câu 10. Giá trị của tích phân $I=\int_0^3\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x+1}}dx$ là

A. $\frac{54}{5}$. B. $\frac{53}{5}$. C. $\frac{52}{5}$. D. $\frac{51}{5}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\sqrt{x+1}=t\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow dx=2tdt$. Khi x = 0 $\Rightarrow$ t = 1, x = 3 $\Rightarrow$ t = 2.

Vậy $I=\int_1^2\frac{2\left(t^2-1\right)^2+\left(t^2-1\right)-1}{t}2tdt=2\int_1^2\left(2t^4-3t^2\right)dt=\left(\frac{4t^5}{5}-2t^3\right)\Big|_1^2=\frac{128}{5}-\frac{4}{5}-16+2=\frac{54}{5}$.

Câu 11. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1\sqrt{\frac{3-x}{1+x}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2$. B. $\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}+2$. C. $\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+2$. D. $\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}+2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{\frac{3-x}{1+x}}\Rightarrow I=8\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}$; đặt $t=\tan u$.... ĐS: $I=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2$.

Chú ý: Phân tích $I=\int_0^1 \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{1+x}}dx$, rồi đặt $t=\sqrt{1+x}$ sẽ tính nhanh hơn.

Câu 12. Giá trị của tích phân $\int_0^1 (2x+1)^5\,dx$ là

A. $60\frac{2}{3}$. B. $60\frac{1}{3}$. C. $30\frac{1}{3}$. D. $30\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=2x+1$ khi $x=0$ thì $u=1$. Khi $x=1$ thì $u=3$

Ta có: $du=2dx \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$.

Do đó: $\int_0^1 (2x+1)^5\,dx=\frac{1}{2}\int_1^3 u^5du=\frac{u^6}{12}\Big|_1^3=\frac{1}{12}(3^6-1)=60\frac{2}{3}$.

Câu 13. Giá trị của tích phân $\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx$ là

A. $2\ln 3$. B. $\ln 3$. C. $2\ln 2$. D. $\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=x^2+x+1$. Khi $x=0$ thì $u=1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Ta có: $du=(2x+1)dx$.

Do đó: $\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx=\int_1^3 \frac{2du}{u}=2\ln|u|\Big|_1^3=2(\ln 3-\ln 1)=2\ln 3$.

Câu 14. Giá trị của tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2}$ là

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=2x-1$. Khi $x=1$ thì $u=1$. Khi $x=2$ thì $u=3$.

Ta có $du=2dx\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$.

Do đó $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u}\Big|_1^3 = -\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-1) = \frac{1}{3}$.

Câu 15. Giá trị của tích phân $\int_0^3 \frac{x-3}{3.\sqrt{x+1}+x+3}dx$ là

A. $-3+6\ln\frac{3}{2}$. B. $3+6\ln\frac{3}{2}$. C. $3+3\ln\frac{3}{2}$. D. $-3+3\ln\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\sqrt{x+1} \Rightarrow u^2-1=x \Rightarrow 2udu=dx$; đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=3 \Rightarrow u=2 \end{cases}$

Ta có

$$\int_0^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx = \int_1^2 \frac{2u^3-8u}{u^2+3u+2}du = \int_1^2 (2u-6)du + 6\int_1^2 \frac{1}{u+1}du$$

$$= \left(u^2-6u\right)\Big|_1^2 + 6\ln|u+1|\Big|_1^2 = -3+6\ln\frac{3}{2}.$$

Câu 16. Giá trị của tích phân: $I = \int_0^4 \frac{x+1}{\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}dx$ là

A. $2\ln 2-\frac{1}{4}$. B. $2\ln 2-\frac{1}{3}$. C. $2\ln 2-\frac{1}{2}$. D. $\ln 2-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1+\sqrt{1+2x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} \Rightarrow dx=(t-1)dt$ và $x=\frac{t^2-2t}{2}$

Đổi cận:

x	0	4
t	2	4

Ta có

$$I = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{(t^2-2t+2)(t-1)}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{t^3-3t^2+4t-2}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_2^4\left(t-3+\frac{4}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-3t+4\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Bigg|$$

$$= 2\ln 2-\frac{1}{4}$$

Câu 17. Giá trị của tích phân: $I=\int_0^1 \frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx$ là

A. $\frac{1}{900}\left[2^{100}-1\right]$. B. $\frac{1}{900}\left[2^{101}-1\right]$. C. $\frac{1}{900}\left[2^{99}-1\right]$. D. $\frac{1}{900}\left[2^{98}-1\right]$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}\frac{dx}{(2x+1)^2}=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}d\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{100}\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{100}\Bigg|_0^1=\frac{1}{900}[2^{100}-1]$$

Câu 18. Tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2002.2^{1001}}$. B. $\frac{1}{2001.2^{1001}}$. C. $\frac{1}{2001.2^{1002}}$. D. $\frac{1}{2002.2^{1002}}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_1^2 \frac{x^{2004}}{x^3(1+x^2)^{1002}}.dx=\int_1^2 \frac{1}{x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{1002}}.dx$. Đặt $t=\frac{1}{x^2}+1 \Rightarrow dt=-\frac{2}{x^3}dx$.

Câu 19. Giá trị của tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=3x-\frac{2\pi}{3}$. Khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $u=\frac{\pi}{3}$, khi $x=\frac{2\pi}{3}$ thì $u=\frac{4\pi}{3}$.

Ta có $du=3dx\Rightarrow dx=\frac{du}{3}$.

Do đó:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\cos u\,du=\frac{1}{3}\sin u\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 20. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2x dx$ là

A. $\frac{\pi}{8}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\cos 2x dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}(x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{8}$$

Câu 21. Giá trị của tích phân: $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ là

A. $\frac{\pi^2}{4}$. B. $\frac{\pi^2}{6}$. C. $\frac{\pi^2}{8}$. D. $\frac{\pi^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\frac{\pi-t\ \sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-I$$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\pi\int_0^{\pi}\frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t}=\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow I=\frac{\pi^2}{4}$$

Câu 22. Giá trị tích phân $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x+1\right)\cos x dx$ là

A. $\frac{6}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x+1\right)\cos x dx=\left(\frac{1}{5}\sin^5 x+\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6}{5}$$

Câu 23. Giá trị tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ là

A. $\frac{1}{2}\ln 2$. B. $\frac{1}{2}\ln 3$. C. $\ln 2$. D. $\frac{3}{2}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

$Coi: t=\sqrt{1+\sin 2x} \Rightarrow t^2=1+\sin 2x \Rightarrow 2tdt=2\cos 2xdx$

$\Rightarrow dx=\frac{tdt}{t(\cos x-\sin x)} \Rightarrow I=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t}dt=\ln|t|\Big|_1^{\sqrt{2}}=\ln(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\ln 2$

Câu 24. Giá trị tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$ là

A. $\frac{1}{3}\ln 4$. B. $\frac{2}{3}\ln 4$. C. $\frac{2}{3}\ln 2$. D. $\frac{1}{3}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

$Coi: t=1+3\cos x \Rightarrow dt=-3\sin xdx \Rightarrow dx=\frac{-dt}{3\sin x} \Rightarrow I=\frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{t}dt=\frac{\ln|t|}{3}=\frac{1}{3}\ln 4$

Câu 25. Giá trị của tích phân $I=2\int_1^2 \sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 xdx$ là

A. $\frac{12}{91}$. B. $\frac{21}{91}$. C. $\frac{21}{19}$. D. $\frac{12}{19}$.

Hướng dẫn giải

$Coi: t=\sqrt[6]{1-cos^3 x} \Leftrightarrow t^6=1-cos^3 x \Rightarrow 6t^5dt=3\cos^2 x\sin xdx$

$\Rightarrow dx=\frac{2t^5dt}{\cos^2 x\sin x} \Rightarrow I=2\int_0^1 t^6\left(1-t^6\right)dt=2\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^{13}}{13}\right)\Big|_0^1=\frac{12}{91}$

Câu 26. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$ là

A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{7}{8}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\tan x+1)^3\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+1$

Câu 27. Giá trị của tích phân I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$ là

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$. Vậy

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)du}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right]^3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(\sin x + \cos x)^3}$$

Vậy: 2I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \left.\frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Câu 28. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x dx$ là

A. $I = \frac{\pi}{32}$. B. $I = \frac{\pi}{16}$. C. $I = \frac{\pi}{8}$. D. $I = \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 2x dx = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x)dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin^2 2x dx$$

$$= \left.\left(\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{24}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}.$$

Câu 29. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x)dx$ là

A. $I = \frac{33}{128}\pi$. **B.** $I = \frac{32}{128}\pi$**.** **C.** $I = \frac{31}{128}\pi$**.** D. $I = \frac{30}{128}\pi$**.**

Hướng dẫn giải

Ta có: $(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x) = \frac{33}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{3}{64}\cos 8x \Rightarrow I = \frac{33}{128}\pi$.

Câu 30. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}}dx$ là

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}}dx$. Đặt $t=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\Rightarrow$ I = $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$ = $\frac{4}{3}\sqrt{t}\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{2}{3}$.

Câu 31. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{xdx}{\sin x+1}$ là

A. $I=\pi$. B. $I=\frac{\pi}{2}$. C. $I=\frac{\pi}{3}$. D. $I=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$ Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\pi,\ x=\pi\Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)dt}{\sin(\pi-t)+1}=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{\sin t+1}-\frac{t}{\sin t+1}\right)dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dt}{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\frac{dt}{\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

Tổng quát: $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$.

Câu 32. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2007}x}{\sin^{2007}x+\cos^{2007}x}dx$ là

A. $I=\frac{\pi}{4}$. B. $I=\frac{\pi}{2}$. C. $I=\frac{3\pi}{4}$. D. $I=\frac{5\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$. Vậy

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2007}t}{\sin^{2007}t+\cos^{2007}t}dx=J \text{ (1).}$$

Mặt khác $I+J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $I=\frac{\pi}{4}$.

Tổng quát: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\frac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z}^+$.

Câu 33. Giá trị của tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}xdx$ là

A. $\frac{256}{693}$. B. $\frac{254}{693}$. C. $\frac{252}{693}$. D. $\frac{250}{693}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}xdx=\frac{10!!}{11!!}=\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11}=\frac{256}{693}.$$

Câu 34. Giá trị của tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx$ là

A. $\frac{63\pi}{512}$. B. $\frac{61\pi}{512}$. C. $\frac{67\pi}{512}$. D. $\frac{65\pi}{512}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx=\frac{9!!}{10!!}.\frac{\pi}{2}=\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}.\frac{\pi}{2}=\frac{63\pi}{512}$$

Công thức Walliss (dùng cho trắc nghiệm):

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ neáu n leû}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}.\frac{\pi}{2}, \text{ neáu n chaün}\end{cases}.$$

Trong đó: n!! đọc là **n walliss** và được định nghĩa dựa vào n lẻ hay chẵn.

Chẳng hạn:

$0!!=1;\ 1!!=1;\ 2!!=2;\ 3!!=1.3;\ 4!!=2.4;\ 5!!=1.3.5;$

$6!!=2.4.6;\ 7!!=1.3.5.7;\ 8!!=2.4.6.8;\ 9!!=1.3.5.7.9;\ 10!!=2.4.6.8.10$.

Câu 35. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ là

A. $\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$. B. $\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$. C. $2\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$. D. $2\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.

Hướng dẫn giải

$$Vì: \frac{1}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow I=\int\limits_0^1 dx-\int\limits_0^1 \frac{d\left(1+e^x\right)}{1+e^x}$$

$$=1-\ln\left|1+e^x\right|\Big|_0^1=1-\ln(1+e)+\ln 2=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

Câu 36. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$ là

A. $\frac{20}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$Coi: t=\sqrt{e^x-1} \Leftrightarrow t^2=e^x-1 \Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x} \Rightarrow I=2\int\limits_1^2\left(t^2+1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_1^2=\frac{20}{3}$$

Câu 37. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$ là

A. $\frac{4-\pi}{2}$. B. $\frac{4-\pi}{3}$. C. $\frac{5-\pi}{3}$. D. $\frac{5-\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$Coi: t=\sqrt{e^x-1} \Rightarrow t^2=e^x-1 \Rightarrow 2tdt=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt=2\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{4-\pi}{2}$$

Câu 38. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}dx$ là

A. $\sqrt{2}-1$. B. $2\sqrt{2}-1$. C. $\sqrt{2}-2$. D. $2\sqrt{2}-2$.

Hướng dẫn giải

$$Coi: t=\sqrt{e^x+1} \Leftrightarrow t^2=e^x+1 \Leftrightarrow 2tdt=e^xdx \Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x} \Rightarrow I=2\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{tdt}{t^3}=-2.\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}}^{2}=\sqrt{2}-1$$

Câu 39. Giá trị của tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$ là

A. $\ln 2$. B. $\ln 3$. C. $2\ln 3$. D. $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\ln x$; $x=e \Rightarrow t=1,\ x=e^2 \Rightarrow t=2 \ \Rightarrow I=\int_1^2\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^2=\ln 2$.

Câu 40. Giá trị của tích phân: $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}dx}{e^x-1+\sqrt{e^x-2}}$ là

A. 2ln3 – 1. B. $2\ln 2-1$. C. $\ln 3-1$. D. $\ln 2-1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{e^x-2}$, Khi $x=\ ln2 \Rightarrow t\ =\ 0;\ x=\ ln3 \Rightarrow\ t=1; e^x\ =\ t^2+\ 2 \Rightarrow\ e^x dx\ =\ 2tdt$

$$I\ =\ 2\int_0^1\frac{(t^2+2)tdt}{t^2+t+1}\ =2\int_0^1(t-1+\frac{2t+1}{t^2+t+1})dt\ =2\int_0^1(t-1)dt\ +2\int_0^1\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}$$

$$=(t^2-2t)\Big|_0^1\ +2\ln(t^2+t+1)\Big|_0^1=2\ln 3-1.$$

Câu 41. Cho $M=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^{3x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx$. Giá trị của e^M là

A. $\frac{11}{4}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. $\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$M=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^{3x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x-(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1)}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}-1\right)dx=\ln\left(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1\right)\Big|_0^{\ln 2}-x\Big|_0^{\ln 2}=\ln\frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow e^M=\frac{11}{4}$$

Câu 42. $I=\int_1^e \frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx$.

A. $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right]$. B. $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5}-\sqrt[3]{2^4}\right]$. C. $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^5}\right]$. D. $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5}-\sqrt[3]{2^5}\right]$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_1^e \frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx=\int_1^e \ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}\,d\left(\ln x\right)=\frac{1}{2}\int_1^e \left(2+\ln^2 x\right)^{\frac{1}{3}}d\left(2+\ln^2 x\right)$$
$$=\frac{3}{8}.\sqrt[3]{\left(2+\ln^2 x\right)^4}\Big|_1^e=\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right]$$

Câu 43. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ là

A. $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$. B. $I=\frac{\pi}{4}\ln 2$. C. $I=\frac{\pi}{8}\ln 3$. D. $I=\frac{\pi}{8}\ln 3$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt$. Đổi biến: $x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt.$$

Đặt $t=\frac{\pi}{4}-u\Rightarrow dt=-du$; Đổi cận: $t=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$, $t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=0$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt=-\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan u\right)du=\frac{\pi}{4}\ln 2-I.$$

Vậy $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Câu 44. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(-x)+2f(x)=\cos x$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. $I=\frac{2}{3}$.   B. $I=\frac{4}{3}$.   C. $I=\frac{1}{3}$.   D. $I=1$.

Hướng dẫn giải

Xét tích phân $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$. Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: $x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$.

Suy ra: $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=I$.

Do đó: $3I=J+2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(-x)+2f(x)\right]dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2$.

Vậy $I=\frac{2}{3}$.

II. VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Tìm hai số thực A,B sao cho $f(x)=A\sin\pi x+B$, biết rằng $f'(1)=2$ và $\int_0^2 f(x)dx=4$.

A. $\begin{cases}A=-\dfrac{2}{\pi}\\ B=2\end{cases}$. B. $\begin{cases}A=2\\ B=-\dfrac{2}{\pi}\end{cases}$. C. $\begin{cases}A=-2\\ B=\dfrac{2}{\pi}\end{cases}$. D. $\begin{cases}A=-2\\ B=-\dfrac{2}{\pi}\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

$f(x)=A\sin\pi x+B\Rightarrow f'(x)=A\cos\pi x$

$f'(1)=2\Rightarrow A\pi\cos\pi=2\Rightarrow A=-\dfrac{2}{\pi}$

$\int_0^2 f(x)dx=4\Rightarrow\int_0^2(A\sin\pi x+B)dx=4$

$-\dfrac{A}{\pi}\cos 2\pi+2B+\dfrac{A}{\pi}\cos 0=4\Rightarrow B=2$

Câu 2. Giá trị của a để đẳng thức $\int_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx=\int_2^4 2xdx$ là đẳng thức đúng

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Hướng dẫn giải

$$12=\int_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx=\left[a^2x+(2-2a)x^2+x^4\right]\Big|_1^2$$

$$\Rightarrow a=3.$$

Câu 3. Giá trị của tích phân $I=\int_0^a\dfrac{dx}{x^2+a^2}\ (a>0)$ là

A. $\dfrac{\pi}{4a}$. B. $\dfrac{\pi^2}{4a}$. C. $-\dfrac{\pi^2}{4a}$. D. $-\dfrac{\pi}{4a}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=a\tan t;\ t\in\left(\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=a(1+\tan^2 t)dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=a\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$. Vậy

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2\tan^2 t+a^2}dt=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4a}.$$

Câu 4. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$ là

A. $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$. B. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. C. $\dfrac{4\pi}{\sqrt{2}}$. D. $\dfrac{-\pi}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$. Đổi cận : $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Vậy

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{3-2t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2}-t^2}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cos u \quad \Rightarrow \quad dt=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sin u du$. Đổi cận : $\begin{cases} t=0 \to u=\dfrac{\pi}{2} \\ t=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \to u=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$, suy ra

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2}-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin u du}{\sqrt{\frac{3}{2}\left(1-\cos^2 u\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} du=\frac{1}{\sqrt{2}}u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Câu 5. Cho $I=\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$. Tích phân nào sau đây có giá trị bằng với giá trị của tích phân đã cho.

A. $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$. B. $\displaystyle\int_1^{x} \frac{dt}{1+t^2}$. C. $-\displaystyle\int_1^{x} \frac{dt}{1+t^2}$. D. $-\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$.

Hướng dẫn giải

$u=\dfrac{1}{t} \Rightarrow t=\dfrac{1}{u} \Rightarrow dt=-\dfrac{1}{u^2}du$

$\begin{cases} t=x \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{x} \\ u=1 \end{cases}$

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{-\frac{1}{u^2}du}{1+\frac{1}{u^2}}=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{-du}{u^2+1}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^2+1} \Rightarrow \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

Câu 6. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx$ là

A. $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

B. $\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

C. $-\sqrt{3}\ln 2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

D. $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} u=\ln(\sin x)\Rightarrow du=\cot^2 xdx \\ dv=\dfrac{1}{\sin^2 x}dx\Rightarrow v=-\cot x \end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx=-\cot x\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 xdx$$

$$=\left(\sqrt{3}\ln\frac{1}{2}-\cot x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

Câu 7. Giá trị của tích phân $I=\int_0^2\min\left\{1,x^2\right\}dx$ là

A. $\frac{3}{4}$.

B. 4.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $-\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Xét hiệu số $1-x^2$ trên đoạn $[0;2]$ để tìm $\min\left\{1,x^2\right\}$. Vậy

$$I=\int_0^2\min\left\{1,x^2\right\}dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+x\Big|_1^2=\frac{4}{3}.$$

Câu 8. Giá trị của tích phân $I=\int_{-8}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx$ là

A. $\ln\frac{2}{3}$.

B. 2.

C. $-\ln 2$.

D. $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\Rightarrow dx=-2tdt$. Đổi cận $\begin{cases} x=-8\Rightarrow t=3 \\ x=-3\Rightarrow t=2 \end{cases}$. Vậy

$$I=\int_{-8}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx=\int_{3}^{2}\frac{-2tdt}{\left(1-t^2\right)t}=2\int_{2}^{3}\frac{tdt}{\left(1-t^2\right)t}=2\int_{2}^{3}\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_2^3=\ln\frac{2}{3}.$$

Câu 9. Biết $I=\int_{1}^{a}\frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2$. Giá trị của a là

A. 2. B. $\ln 2$. C. π. D. 3.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}I&=\int_{1}^{a}\frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2\\&=\int_{1}^{a}xdx-2\int_{1}^{a}\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2\\&=(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2})-2(\frac{1}{a}\ln a+\frac{1}{a}-1)=\frac{1}{2}+\ln 2\\&\Rightarrow a=2\end{aligned}$$

HD casio: Nhập $\int_{1}^{2}\frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx-\frac{1}{2}-\ln 2=0$ nên $a=2$.

Câu 10. Cho $I_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx$, $I_2=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx$. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. $I_2=2\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$. B. $I_1>I_2$. C. $I_1=\frac{14}{9}$. D. $I_2=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$I_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx=\int_{1}^{4}\frac{\sqrt{t}}{3}dt=\frac{14}{9}$$

$$I_2=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx=2\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$$

Câu 11. Tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn $\int_{0}^{m}\left(2x+5\right)dx=6$ là

A. $m=1, m=-6$. B. $m=-1, m=-6$. C. $m=-1, m=6$. D. $m=1, m=6$.

Hướng dẫn giải

$$\int_{0}^{m}\left(2x+5\right)dx=6\Rightarrow(x^2+5x)\Big|_0^m=6\Rightarrow m^2+5m-6=0\Rightarrow m=1,\ m=-6.$$

Hướng dẫn casio: Thay $m=1$ và $m=-6$ vào thấy thỏa mãn.

Câu 12. Cho hàm số $h(x)=\dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$. Tìm để $h(x)=\dfrac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\dfrac{b\cos x}{2+\sin x}$ và tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx$

A. $a=-4,\ b=2;\ I=\dfrac{2}{3}+2\ln\dfrac{3}{2}$.

B. $a=4,\ b=-2;\ I=-\dfrac{2}{3}-2\ln\dfrac{3}{2}$.

C. $a=2,\ b=4;\ I=-\dfrac{1}{3}+4\ln\dfrac{3}{2}$.

D. $a=-2,\ b=4;\ I=\dfrac{1}{3}+4\ln\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng đồng nhất thức, ta thấy

$$h(x)=\frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{b\cos x}{2+\sin x}=\frac{a\cos x+b\cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{2}=1\\ a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=2\end{cases}.$$

Vậy

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-4\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{2\cos x}{2+\sin x}\right)dx=\left(-\frac{4}{2+\sin x}+2\ln|2+\sin x|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{3}+2\ln 3+2-2\ln 2$$
$$=\frac{2}{3}+2\ln\frac{3}{2}.$$

Câu 13. Giá trị trung bình của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$, kí hiệu là $m(f)$ được tính theo công thức $m(f)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. Giá trị trung bình của hàm số $f(x)=\sin x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\dfrac{2}{\pi}$.

B. $\dfrac{3}{\pi}$.

C. $\dfrac{1}{\pi}$.

D. $\dfrac{4}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

$$m(f)=\frac{1}{\pi-0}\int\limits_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}.$$

Câu 14. Cho ba tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{3x+1}$, $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx$ và $K=\int\limits_{-1}^2\left(x^2+3x+1\right)dx$. Tích phân nào có giá trị bằng $\dfrac{21}{2}$?

A. *K*.

B. *I*.

C. *J*.

D. *J* và *K*.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 4$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\frac{1}{2}$$

$$K=\int_{-1}^{2}\left(x^2+3x+1\right)dx=\frac{21}{2}.$$

Câu 15. Với $0<a<1$, giá trị của tích phân sau $\int_0^a \frac{dx}{x^2-3x+2}dx$ là:

A. $\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$. B. $\ln\left|\frac{a-2}{2a-1}\right|$. C. $\ln\left|\frac{a-2}{2(a-1)}\right|$. D. $\ln\left|\frac{a-2}{2a+1}\right|$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^a \frac{dx}{x^2-3x+2}=\int_0^a\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_0^a=\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$$

Câu 16. Cho $2\sqrt{3}m-\int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx=0$. Khi đó giá trị của $144m^2-1$ bằng

A. $\frac{-2}{3}$. B. $4\sqrt{3}-1$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$2\sqrt{3}.m-\int_0^1\frac{d(x^4+2)}{(x^4+2)^2}=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}.m+\frac{1}{(x^4+2)}\Big|_0^1=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}m+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

Vậy

$$144m^2-1=144\left(\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)^2-1=\frac{-2}{3}.$$

Câu 17. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$, đồng thời thỏa mãn $f(a)=f(b)$. Lựa chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=0$. B. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=1$.

C. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=-1$. D. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=2$.

Hướng dẫn giải

$$\int_a^b e^{f(x)}f'(x)dx=\int_a^b e^{f(x)}d(f(x))=e^{f(x)}\Big|_a^b=e^{f(b)}-e^{f(a)}=0.$$

Câu 18. Kết quả phép tính tích phân $I=\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ có dạng $I=a\ln 3+b\ln 5\,(a,b\in\mathbb{Z})$. Khi đó $a^2+ab+3b^2$ có giá trị là

A. 5. B. 1. C. 0. D. 4.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$I=\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}=2\int_2^4 \frac{1}{t^2-1}dt=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\ln 3-\ln 5,$$

suy ra $a=2,b=-1$. Vậy $a^2+ab+3b^2=4-2+3=5$.

Câu 19. Với $n\in\mathbb{N},n\geq 1$, tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin xdx$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{n+1}$. B. $\frac{1}{n-1}$. C. $\frac{1}{2n}$. D. $\frac{1}{n}$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin xdx=\int_0^1 t^n dt=\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

Câu 20. Với $n\in\mathbb{N},n>1$, giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{4}$. B. $-\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{3\pi}{4}$. D. $-\frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=-dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx=2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

Câu 21. Giá trị của tích phân $\int_0^{2017\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ là

A. $4034\sqrt{2}$. B. $-4043\sqrt{2}$. C. $3043\sqrt{2}$. D. $3034\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Do hàm số $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$ là hàm liên tục và tuần hoàn với chu kì $T=\pi$ nên ta có

$$\int_0^T f(x)dx=\int_T^{2T} f(x)dx=\int_{2T}^{3T} f(x)dx=...=\int_{(n-1)T}^{nT} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{nT} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx+\int_T^{2T} f(x)dx+...+\int_{(n-1)T}^{nT} f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{2017\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=2017\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=2017\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx=4034\sqrt{2}$$

Câu 22. Bất đẳng thức $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{\sqrt{4-x^2}}dx\le M$ luôn đúng khi giá trị của M là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

$\sin^{10}x+\cos^{10}x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{\sqrt{4-x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{\sqrt{4-x^2}}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\arcsin\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{\sqrt{4-x^2}}dx\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 23. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\right)dx$ là

A. $2\ln 2-1$. B. $-2\ln 2-1$. C. $2\ln 3-1$. D. $-2\ln 3-1$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln(1+\sin x)^{1+\cos x}-\ln(1+\cos x)\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)dx$$

$$x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$$

$$\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(1+\sin x)dx=2\ln 2-1$$

Câu 24. Có mấy giá trị của b thỏa mãn $\int_0^b(3x^2-12x+11)dx=6$

A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^b(3x^2-12x+11)dx=\left(x^3-6x^2+11x\right)\Big|_0^b=b^3-6b^2+11b-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \\ b=3 \end{array}\right.$$

Câu 25. Biết rằng $\int_0^b 6dx=6$ và $\int_0^a xe^x dx=a$. Khi đó biểu thức $b^2+a^3+3a^2+2a$ có giá trị bằng

A. 7. B. 4. C. 5. D. 3.

Hướng dẫn giải

+Ta có $\int_0^b 6dx=6\Rightarrow b=1$.

+Tính $\int_0^a xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$. Khi đó,

$$\int_0^a xe^x dx=xe^x\Big|_0^a-\int_0^a e^x dx=e^a-e^a+1=a\Rightarrow a=1.$$

Vậy $b^2+a^3+3a^2+2a=7$.

Câu 26. Biết rằng $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}=A$, $\int_0^{b\pi} 2dx=B$ (với $a,b>0$). Khi đó giá trị của biểu thức $4aA+\frac{B}{2b}$ bằng

A. 2π B. π C. 3π D. 4π

Hướng dẫn giải

+Tính $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$

Đặt $t=a\tan x;\ a\in\left(\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=a(1+\tan^2 t)dt$

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0;\ x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$. Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2\tan^2 t+a^2}dt=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt=\frac{\pi}{4a}$$

+Tính: $\int_0^{b\pi} 2dx=2b\pi$, suy ra $\frac{B}{2b}=\pi$

Câu 27. Tích phân $\int_0^{\pi} \sin^4 x.\cos^6 xdx$ luôn luôn bé hơn

A. $\frac{243\pi}{6250}$. B. $\frac{234\pi}{6250}$. C. $-\frac{243\pi}{6250}$. D. $-\frac{234\pi}{6250}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy

$$\begin{aligned}\sin^4 x\cos^6 x&=(1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x)\cos^2 x\cos^2 x\cos^2 x\\&=\frac{1}{2}(2-2\cos^2 x)(1-\cos^2 x)\cos^2 x\cos^2 x\cos^2 x\\&\le\frac{1}{2}\left(\frac{2-2\cos^2 x+1-\cos^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x}{5}\right)^3\\&=\frac{243}{6250}\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^{\pi} \sin^4 x\cos^6 xdx\le\frac{243\pi}{6250}$.