THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Phương pháp: Sử dụng công thức thể tích
- Thể tích khối lăng trụ: $V = B.h$
- Thể tích khối hộp chữ nhật có các cạnh a, b, c: $V = abc$
- Thể tích khối lập phương cạnh a: $V = a^3$

Để tính thể tích của khối lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$ ta cần đi tính chiều cao của lăng trụ và diện tích đáy. Các tính chất của lăng trụ:

a) Hình lăng trụ
- Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song với nhau.
- Lăng trụ có các cạnh bên vuông góc hai đáy được gọi là lăng trụ đứng.
  * Các cạnh bên của lăng trụ đứng chính là đường cao của nó
  * Các mặt bên của lăng trụ đứng là các hình chữ nhật
- Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là lăng trụ đều
  Các mặt bên của lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau.

b) Hình Hộp : Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành
- Hình hộp đứng có các cạnh bên vuông góc với đáy
- Hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.
- Hình hộp chữ nhật có ba kích thước bằng nhau được gọi là hình lập phương.
- Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $d = a\sqrt{3}$.

Ví dụ 1.3 Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.

Lời giải.

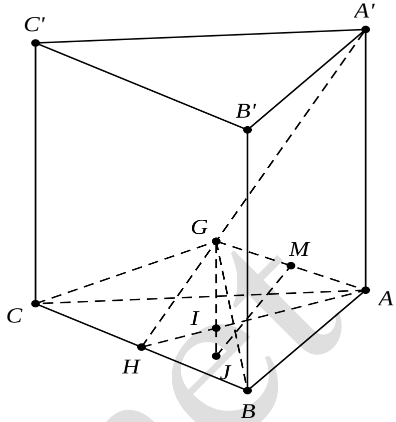
Gọi H là trung điểm của BC, theo giả thuyết ta có : $A'HA = 60^0$

Ta có : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, A'H = 2AH = a\sqrt{3}$

và $AA' = \frac{3a}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt).



Gọi I là tâm của tam giác ABC, suy ra $GI\ //\ AA' \Rightarrow GI \perp (ABC)$

Gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ suy ra J là giao điểm của GI với đường trung trực đoạn GA; M là trung điểm GA, nên có:

$GM.GA = GJ.GI \Rightarrow R = GI = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{7a}{12}$.

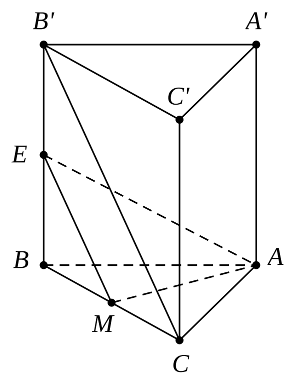
Ví dụ 2..3 Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, $B'C$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B.

Thể tích khối lăng trụ là:

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ (đvtt).



Gọi E là trung điểm của BB'.

Khi đó mặt phẳng $(AME)\ //\ B'C$ nên

$d\left(AM, B'C\right) = d\left(B'C, (AME)\right) = d\left(C, (AME)\right)$.

Nhận thấy $d\left(C, (AME)\right) = d\left(B, (AME)\right) = h$

Do tứ diện $BAME$ có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

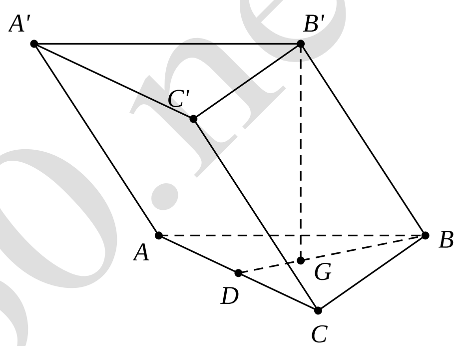
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Ví dụ 3.3 Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $BAC = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'.ABC$ theo a.

Lời giải.

Gọi D là trung điểm AC,

G là trong tâm ΔABC



$\Rightarrow B'G \perp (ABC) \Rightarrow B'BG = 60^0$

$\Rightarrow B'G = BB'.\sin B'BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$BG = \dfrac{a}{2} \Rightarrow BD = \dfrac{3a}{4}$.

Trong ΔABC, ta có: $BC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}, AC = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow CD = \dfrac{AB}{4}$

$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \dfrac{3AB^2}{4} + \dfrac{AB^2}{16} = \dfrac{9a^2}{16}$

$\Rightarrow AB = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}, AC = \dfrac{3a\sqrt{13}}{26}; S_{\Delta ABC} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{104}$

Thể tích khối tứ diện $A'.ABC$:

$$V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \frac{1}{3}B'G.S_{\Delta ABC} = \frac{9a^3}{208}.$$

Ví dụ 4.3 Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ và

$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

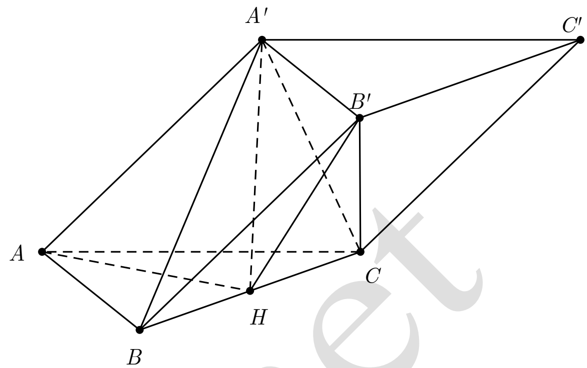
$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2$

$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{3}$

(đvtt).

Trong tam giác vuông $A'B'H$ có:



$HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác $B'BH$ cân tại B'.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì: $\varphi = B'BH$. Vậy

$\cos\varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 5.3 Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a. ***Đề thi ĐH Khối B – 2011***

Lời giải.

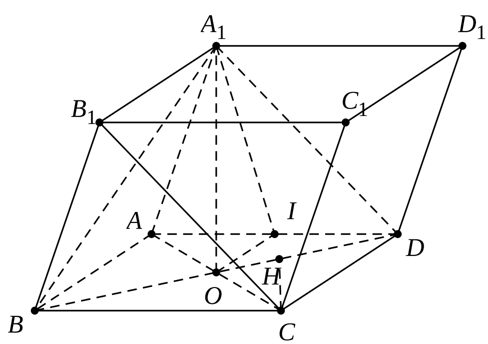
Gọi $O = AC \cap BD, I$ là trung điểm cạnh AD.

Ta có $AD \perp (AOI)$

$\Rightarrow A_1IO = \left((ADD_1A_1),(ABCD)\right) = 60^0$

Vì $OI = \frac{a}{2}$, suy ra $A_1I = 2OI = a$

$\Rightarrow A_1O = OI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Do đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = A_1O.S_{ABCD} = a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$

Gọi B_2 là điểm chiếu của B_1 xuống mặt phẳng $(ABCD)$

$B_1C // A_1D \Rightarrow B_1C // (A_1BD) \Rightarrow d(B_1,(A_1BD)) = d(C,(A_1BD)) = CH$

Trong đó CH là đường cao của tam giác vuông BCD

Ta có: $CH = \frac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(B_1,(A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 60^0 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30^0.

3. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm cạnh CC', biết $AM \perp B'M$. Hãy tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và cô sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AMB') với (ABC).

4. Cho lăng trụ đứng tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a, đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Bài 2

1. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.
2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và hình chiếu của A' lên $mp(ABC)$ trùng với trung điểm của BC.Tính thể tích của khối lăng trụ đó.
3. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là ABC là tam giác cân tại A, $AB = AC = a, BAC = 120^0$, hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích khối lăng trụ biết cạnh bên $AA' = 2a$.
4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu của đỉnh C trên mặt phẳng $(ABB'A')$ là tâm của hình bình hành $ABB'A'$. Tính thể tích của khối lăng trụ.
5. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h và hai đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính thể tích khối lăng trụ và diện tích xung quanh của nó.
Bài 3
1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, A'A = A'B = A'C = b.$ Tìm b để góc giữa mặt bên $(ABB'A')$ và mặt đáy bằng 60^0 và tính thể tích của khối lăng trụ khi đó.
2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $a.$ Mặt phẳng (ABC') hợp với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $\alpha.$ Tính thể tích và diện tích xung quanh của khối lăng trụ.
3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C',$ có đáy ABC là tam giác cân tại $A, AB = AC = a, BAC = \alpha.$ Gọi M là trung điểm của $A'A.$ Tính thể tích của khối lăng trụ biết tam giác $C'MB$ vuông.
4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $A, BC = a, ABC = \alpha.$ Các mặt phẳng $(A'AB),(A'BC),(A'CA)$ nghiêng đều trên đáy một góc $\beta.$ Hình chiếu của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) thuộc miền trong tam giác $ABC.$ Chứng minh thể tích của khối lăng

trụ $ABC.A'B'C'$ được tính theo công thức $V = \dfrac{\sqrt{2}.a^3.\sin^2 2\alpha.\tan\beta}{32\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ đường thẳng AA' đến mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng a, khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(C'AB)$ bằng b, mặt phẳng $(C'AB)$ tạo với đáy góc α. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Bài 4

1. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$. Mặt phẳng $(B'AC)$ tạo với đáy một góc 30^0, khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối hộp biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a}{2}$.

Bài 5

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a, $BAD = 60^0$, $BAA' = 90^0, DAA' = 120^0$. Tính thể tích khối hộp.

2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc $BAA' = BAD = DAA' = 60^0$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a.

3. Cho hình hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $a, BAA' = BAD = DAA' = \alpha, (0 < \alpha < 90^0)$. Tính thể tích của khối hộp theo a và α.

Bài 6

1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $B, AB = a, BC = 2a, AA' = 3a$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với CA' lần lượt cắt các đoạn thẳng CC' và BB' tại M, N. Tính diện tích tam giác AMN.

2. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên là h. Từ một đỉnh vẽ hai đường chéo của hai mặt bên kề nhau. Góc giữa hai đường chéo đó có số đo là $\alpha\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đã cho.

Bài 7

1. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (BMC') biết $BM \perp AC'$.

2. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, cạnh đáy a. Mặt phẳng (ABC') hợp với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc có số đo là $\alpha\left(0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC và BC'.

a) Chứng minh $AIJ = \alpha$.

b) Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và diện tích xung quanh của hình lăng trụ đó.

3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AC = 2a$ và $BAC = 120^0$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' thì $BMA' = 90^0$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BMA').

4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BC = a, BA'C = 90^0$. Các đường thẳng BA', CA' tạo với mặt phẳng đáy các góc tương ứng α, β $(\alpha < \beta)$. Tính thể tích của lăng trụ và khoảng cách từ B' đến (BCA').

Bài 8

1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = b$, $AA' = c$. Gọi M là điểm chia đoạn AD theo tỉ số -3. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(AB'C)$.

2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác cân tại A. Góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' là 30^0 và khoảng cách giữa chúng là a. Góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt bên qua AA' là 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

3. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa CK và $A'D$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 9

1. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $A, AC = a, ACB = \alpha$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc β. Tính thể tích khối lăng trụ đó.

2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông thỏa mãn $AB = AC = a$. Góc giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$ bằng α. Tính thể tích khối lăng trụ theo a và α.

3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, BC = 2a$ .Mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi , mặt bên $BCC'B'$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy , hai mặt này hợp với nhau một góc bằng α .

a)Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$. Xác định góc α .

b)Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $A = 60^0$. Chân đường vuông góc hạ từ B' xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo của đáy $ABCD$. Cho $BB' = a$.

a)Tính góc giữa cạnh bên và đáy.

b) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình hộp .

Bài 10

1. Cho hình lăng trụ $AB.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $A'A = A'B = A'C$, $BAA' = \alpha$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

2. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, đường chéo BC' hợp với mặt bên $(ABB'A')$ một góc α. Tính thể tích, diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của khối lăng trụ. Xác định góc α để hình lăng trụ đó tồn tại.

Bài 11

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC, N thuộc cạnh CD thỏa $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lập phương thành hai khối, gọi (H) là khối chứa điểm A. Tính thể tích của khối (H) theo a.

2. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $a, BAD = \alpha$ $(0 < \alpha \leq 90^0)$. Tính thể tích của khối lăng trụ biết rằng hai đường thẳng AB' và BD' vuông góc.

3. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thoi. Biết diện tích hai mặt chéo $ACC'A'$ và $BDD'B'$là s_1, s_2, góc $BA'D = 90^0$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo s_1 và s_2.

Bài 12

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt bên hợp và mặt $(A'BD)$ với đáy góc 60^0, biết góc $BAD = 60^0, AB = 2a, BD = a\sqrt{7}$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Mặt phẳng $(A'BC)$ cách A một khoảng cách bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ và hợp với BC' một góc α biết $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{10}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc vủa A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cho $BAA' = 45^0$.

a)Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

b)Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Bài 13

1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$ bằng a, khoảng cách từ C đến (ABC') bằng b, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) băng φ.

a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a, b và φ.

b) Khi $a = b$ không đổi, hãy xác định φ để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất.

2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều nội tiếp trong đường tròn (O) tâm O. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) là O. Khoảng cách giữa AB và CC' là d. Góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt bên $ACC'A'$ và $BCC'B'$ là 2φ $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$.

a) Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

b) Gọi α $\left(0 < \alpha \le 90^0\right)$ là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC). Tính φ biết $\alpha + \varphi = 90^0$.

Bài 14

1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa đường chéo AC' và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 30^0 và $AC' = a$, $AC'B = \varphi$. Tính thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ theo a và φ. Giả sử a không đổi, tìm φ để thể tích khối hộp lớn nhất.

2. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ có $BD = a$ không đổi và $BAD = DCB = 90^0, ABD = \alpha, CBD = \beta$. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ là hình thoi, vuông góc với đáy và $A'AC = 60^0$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và tìm α, β để thể tích đó lớn nhất.

3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có đường chéo $AC' = d$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc α, hợp với mặt bên $(BCC'B')$ góc β. Tìm hệ thức liên hệ giữa α, β để tứ giác $A'D'CB$ là hình vuông và tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối hộp chữ nhật khi đó.

4. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Tam giác ABC' có diện tích $Q\sqrt{3}$ và hợp với mặt phẳng đáy một góc có số đo bằng $\alpha\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo Q và α.

b) Cho Q không đổi và α thay đổi. Tính α để thể tích V lớn nhất.

5. Gọi $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ là các góc của đường chéo hình hộp chữ nhật với ba cạnh cùng phát xuất từ một đỉnh và ba mặt cùng phát xuất từ một đỉnh. Chứng minh : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; $\sin^2\alpha_1 + \sin^2\beta_1 + \sin^2\gamma_1 = 1$.