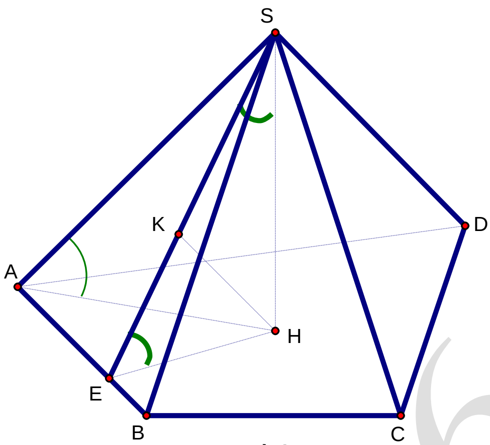
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

A.TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA.

I. HÌNH CHÓP. KHỐI CHÓP.

1 Hình chóp .

Cho đa giác lồi $A_1A_2....A_n$ và điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa đa giác . Hình giới hạn bởi n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là hình chóp .



Hình 1

- Hình 1 là hình chóp tứ giác $S.ABCD$.
- S : đỉnh
- Tứ giác $ABCD$ là đáy.
- Các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA là các mặt bên.
- Các tam giác SAC, SBD là các mặt chéo .
- Các cạnh SA, SB, SC, SD là các cạnh bên.
- Khoảng cách từ đỉnh đến đáy gọi là chiều cao h của hình chóp .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ thì $SH = h$ **.**

- SAH là góc giữa cạnh bên SA và mặt phẳng đáy.
- **Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên AB** thì SEH là góc giữa mặt bên SAB và đáy .
- HSE là góc giữa đường cao SH và mặt bên SAB .
- K là hình chiếu vuông góc của H lên SE thì độ dài đoạn HK là khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAB).

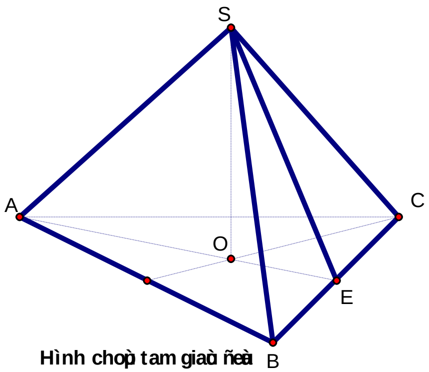
2.Khối chóp

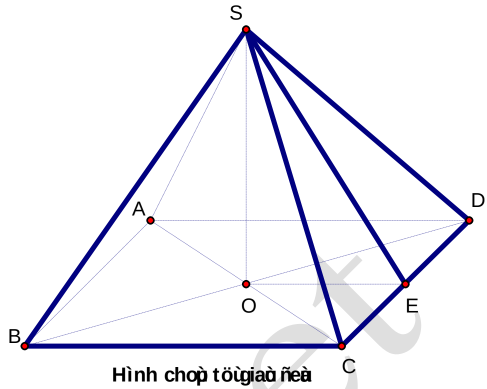
Khối chóp là một khối đa diện giới hạn bởi một hình chóp .

3.Các hình chóp đặc biệt.

3.1.Hình chóp đều.

Định nghĩa . Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau.





Tính chất.

- Đáy là một đa giác đều.
- Hình chiếu vuông góc của đỉnh trên đáy là tâm của đáy .
- Các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau. Đường cao vẽ từ đỉnh của một mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp đều.
- Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

3.2. Tứ diện đều.

Định nghĩa. Tứ diện đều là tứ diện có 6 cạnh bằng nhau.

Tính chất.

- Các mặt của tứ diện đều là các tam giác đều bằng nhau.

Ghi chú. *Một hình chóp tam giác đều là tứ diện đều khi và chỉ khi cạnh bên bằng cạnh đáy.*

3.3. Tứ diện gần đều .

Định nghĩa . Tứ diện gần đều là tứ diện có các cạnh đối diện bằng nhau.

II. DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN , THỂ TÍCH KHỐI CHÓP.

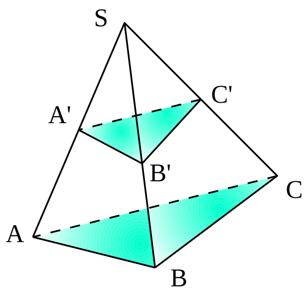
1.Diện tích xung quanh , diện tích toàn phần của hình chóp ,thể tích khối chóp.

Diện tích xung quanh : **S_{xq} = tổng diện tích các mặt bên.**

Diện tích toàn phần : $S_{tp} = Sxq + S_{đáy}$

Thể tích khối chóp : $V = \frac{1}{3}B.h$, trong đó B là diện tích đáy , h là chiều cao của khối chóp.

2. Tỉ số thể tích của hai tứ diện

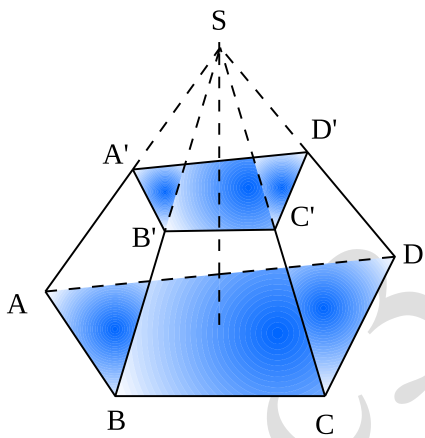


$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

III.HÌNH CHÓP CỤT . KHỐI CHÓP CỤT

1.Hình chóp cụt .

Định nghĩa : Hình chóp cụt là phần của hình chóp được giới hạn bởi đáy và một thiết diện song song với đáy



Hình vẽ bên là hình chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$.
Đáy $ABCD$ gọi là đáy lớn , đáy $A'B'C'D'$ gọi là đáy nhỏ
Khoảng cách giữa hai đáy gọi là chiều cao của hình chóp cụt.
Các mặt $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$ gọi các mặt bên . Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang,.
Các cạnh AA', BB', CC', DD' gọi là các cạnh bên , các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại đỉnh của hình chóp phát sinh ra hình chóp cụt đó.

2.Hình chóp cụt đều :Là hình chóp cụt được cắt ra từ hình chóp đều

Tính chất của hình chóp cụt đêu :

- Hai đáy là hai đa giác đều.
- Chiều cao là khoảng cách giữa tâm hai đáy .
- Các cạnh bên bằng nhau và hợp với đáy các góc bằng nhau
- Các mặt bên là các hình thang cân bằng nhau và hợp với đáy các góc bằng nhau.Chiều cao của một mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp cụt đều.

3.Khối chóp cụt.

Định nghĩa . Khối chóp cụt là khối đa diện giới hạn bởi một hình chóp cụt.

4.Diện tích của hình chóp cụt. Thể tích của khối chóp cụt.

Diện tích xung quanh. S_{xq} **= tổng diện tích các mặt bên.**

Diện tích toàn phần . $S_{tp} = S_{xq} + S$ hai đáy **.**

Thể tích : $V = \frac{h}{3}\left(B + \sqrt{B.B'} + B'\right)$ trong đó B, B' là diện tích hai đáy , h là chiều cao.

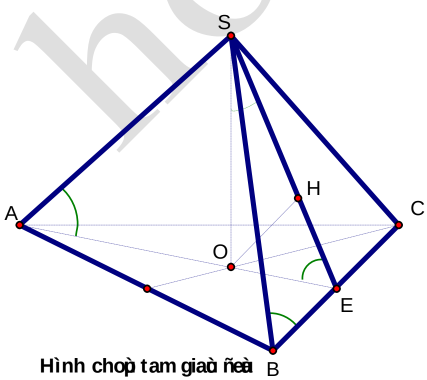
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Để tính thể tích khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ ta đi tính đường cao và diện tích đáy. Khi xác định chân đường cao của hình chóp cần chú ý:

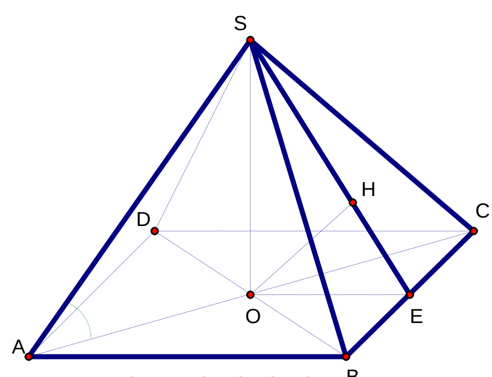
- Hình chóp đều thì chân của đường cao là tâm của đáy
- Hình chóp có mặt bên (SA_iA_k) vuông góc với mặt đáy thì chân đường cao cảu tam giác SA_iA_k hạ từ S là chân đường cao của hình chóp.
- Nếu có hai mặt phẳng đi qua đỉnh và cùng vuông góc với đáy thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó vuông góc với đáy.
- Nếu các cạnh bên của hình chóp bằng nhau thì hình chiếu của đỉnh là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Nếu các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau thì hình chiếu của đỉnh là tâm đường tròn nội tiếp đáy.

Chú ý: Hình chóp đều.

Khi giải các bài toán tính thể tích của khối chóp, diện tích xung quanh , diện tích toàn phần ,ta thường gặp các giả thiết về góc ,khoảng cách ,do đó cần xem lại các cách dựng góc giữa đường thẳng và mặt phẳng , góc giữa hai mặt phẳng , khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ,khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau….



Hình chọp tam giaù ñeà

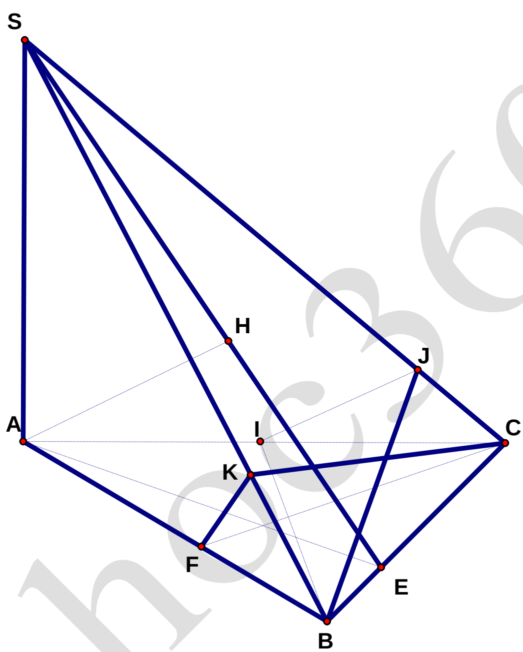


Hình chọp töù giaù ñeà

- $SO = h =$ chiều cao của hình chóp .
- SAO là góc giữa cạnh bên và đáy
- E là trung điểm của BC, SEO là góc giữa mặt bên và đáy.
- SBC là góc ở đáy của một mặt bên.
- OSE là góc giữa SO và mặt bên.
- Dựng OH vuông góc với SE tại H thì OH là khoảng cách từ O đến mặt (SBC).

Chú ý: Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Dưới đây là một cách dựng các loại khoảng cách và các loại góc thường gặp trong một hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy .



* Xét hình chóp $S.ABC$ trong đó $SA \perp (ABC)$.

Dựng $AE \perp BC, (E \in BC)$, ta có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là SEA ,

$(SA,(SBC)) = ASE$,

$AE = d(SA, BC)$.

Dựng $AH \perp SE \ (H \in SE) \Rightarrow AH = d(A,(SBC))$.

$(SB,(ABC)) = SBA$, $(SC,(ABC)) = SCA$.

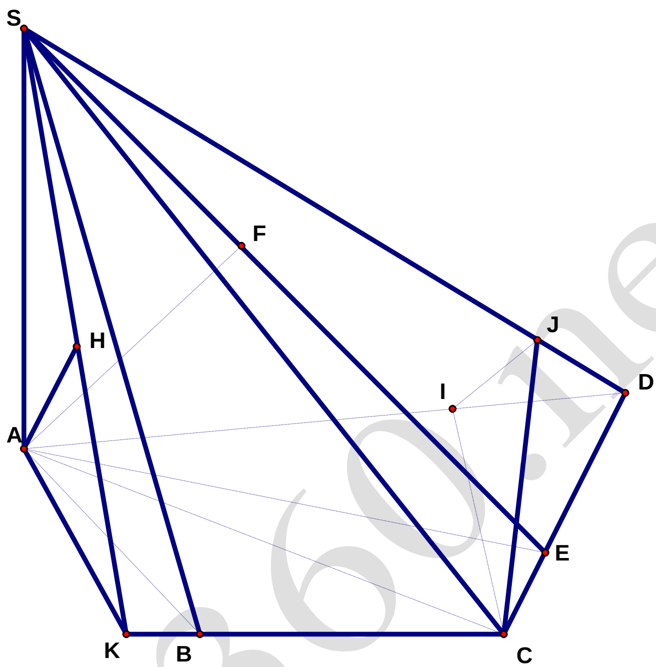
Dựng $CF \perp AB \ (F \in AB) \Rightarrow CF \perp (SAB) \Rightarrow CF = d(C,(SAB))$

Dựng $FK \perp SB \ (K \in SB) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là CKF.

Dựng $BI \perp AC \ (I \in AC) \Rightarrow BI = d(B,(SAC))$.

Dựng $IJ \perp SC\left(J \in SC\right) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $\left(SAC\right)$ là BJI.

*Xét hình chóp $S.ABCD$ trong đó $SA \perp \left(ABCD\right)$.



Dựng $AE \perp CD\left(E \in CD\right)$, $AK \perp BC\left(K \in BC\right)$

$\Rightarrow AK = d\left(SA,\ BC\right), AE = d\left(SA,\ CD\right), \left(\left(SCD\right),\left(ABCD\right)\right) = SEA, \left(\left(SBC\right),\left(ABCD\right)\right) = SKA$

Dựng $AH \perp SK\left(H \in SK\right)$, $AF \perp SE\left(F \in SE\right)$

$\Rightarrow AH \perp \left(SBC\right),\ AF \perp \left(SCD\right)$

$\Rightarrow AH = d\left(A,\left(SBC\right)\right),\ AF = d\left(A,\left(SCD\right)\right)$, $\left(\left(SBC\right),\left(SCD\right)\right) = \left(AH, AF\right)$.

Dựng $CI \perp AD\left(I \in AD\right) \Rightarrow CI = d\left(C,\left(SAD\right)\right)$

Dựng $IJ \perp SD\left(J \in SD\right) \Rightarrow \left(\left(SAD\right),\left(SCD\right)\right) = IJC$.

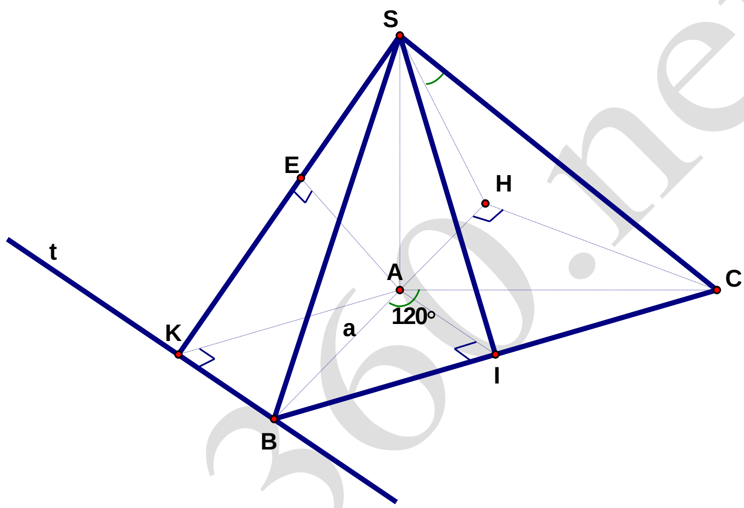
$d\left(C,\left(SAB\right)\right), \left(\left(SAB\right),\left(SBC\right)\right)$ được xác định tương tự như trên

Ví dụ 1. 2 Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác cân có $AB = AC = a$, $BAC = 120^0$, góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) là 30^0.

1. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$;

2.Gọi I là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SB .

Lời giải.



1.Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ **.**

$$\begin{cases}(SAB)\cap(SAC)=SA\\(SAB)\perp(ABC),(SAC)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC)$$

Dựng $CH\perp AB$ tại H, khi đó $\begin{cases}CH\perp SA\\CH\perp AB\end{cases}\Rightarrow CH\perp(SAB)$ $\Rightarrow hcSC/_{(SAB)}=SH$

$\Rightarrow (SC,(SAB))=(SC,SH)=CSH=30^0$ (giả thiết)

Trong tam giác vuông AHC:

$$AH = AC.\cos 60^0 = \frac{a}{2}, CH = AC.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2} .$$

Trong tam giác vuông SHC (vuông tại S), $SH = CH.\cot 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Trong tam giác vuông SAH (vuông tại A)

$$SA=\sqrt{SH^2-AH^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=a\sqrt{2}.$$

Diện tích tam giác

$ABC: S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC=\frac{a^2}{2}.\sin 120^0=\frac{a^2}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra thể tích của khối chóp $S.ABC$.

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{24}.$$

2. Tính $d\left(AI,SB\right)$.

Dựng đường thẳng Bt song song với AI, ta có Bt vuông góc với BC và mặt phẳng $\left(S,Bt\right)$ là mặt phẳng chứa SB và song song với AI, suy ra

$$d\left(SB,AI\right)=d\left(A,\left(S,Bt\right)\right).$$

Dựng BK vuông góc với Bt tại K, dựng AE vuông góc với SK tại K, khi đó ta có:

$$\begin{cases} Bt\perp SA \\ Bt\perp AK \end{cases}\Rightarrow Bt\perp\left(SAK\right)\Rightarrow Bt\perp\left(SAK\right)\Rightarrow Bt\perp AE.$$

$$\begin{cases} AE\perp Bt \\ AE\perp SK \end{cases}\Rightarrow AE\perp\left(S,Bt\right)\Rightarrow AE=d\left(A,\left(S,Bt\right)\right)=d\left(AI,SB\right).$$

Tứ giác $AKBI$ có $K=\hat{B}=\hat{I}=90^0$ nên là hình chữ nhật, suy ra

$$AK=IB=AB.\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trong tam giác vuông SAK (vuông tại A), ta có

$$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{11}{6a^2}\Rightarrow AE=\frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

Vậy $d\left(AI,SB\right)=\frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Ví dụ 2. 2 Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh bằng a, đường cao SH.

1. Chứng minh SA vuông góc với BC;

2. Tính thể tích của khối chóp $SABC$;

3. Gọi O là trung điểm của đoạn SH. Chứng minh rằng OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau.

Lời giải.

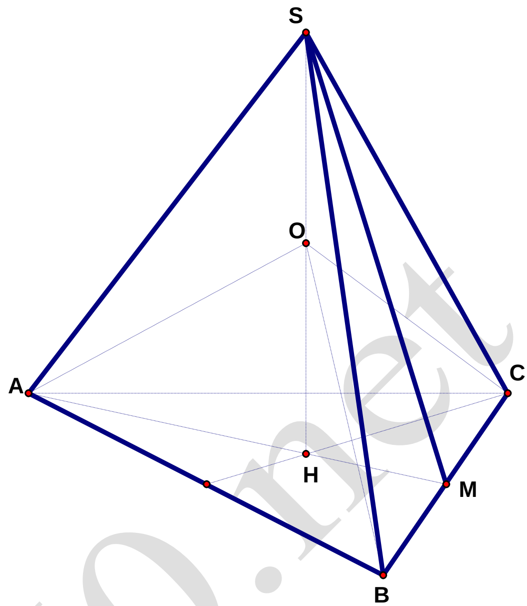
1. Chứng minh $SA \perp BC$ **.**
Gọi M là trung điểm của cạnh BC, vì các tam giác ABC, SBC là các tam giác đều nên $\begin{cases} AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SA.$

2. Tính V_{SABC} .
Theo tính chất của hình chóp đều ta có H là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow H \in AM$,

$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH.$



Trong tam giác vuông SHA (vuông tại H),

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Thể tích của khối chóp $SABC$: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

3. Chứng minh OA, OB, OC đôi một vuông góc .
O thuộc trục SH của tam giác ABC nên $OA = OB = OC$.

Trong tam giác vuông OHA, $OA^2 = AH^2 + OH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.

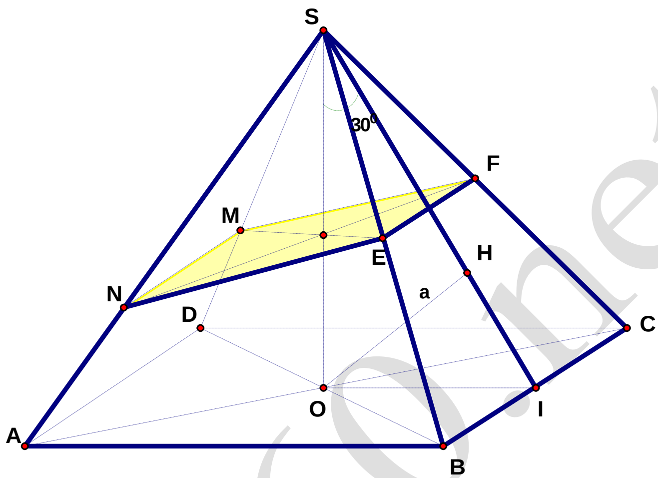
Trong tam giác cân OAB: $OA^2 + OB^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O, tức là $OA \perp OB$.
Chứng minh tương tự ta có OA, OB, OC đôi một vuông góc .

Ví dụ 3. 2 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt bên là a, góc giữa đường cao và mặt bên là 30^0.
1. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$;

2. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC; M là điểm trên cạnh SD sao cho $MS = 2MD$. Mặt phẳng (MEF) cắt SA tại N. Tính thể tích của khối chóp $S.EFMN$

Lời giải.



1.Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Gọi I là trung điểm của cạnh BC, ta có $BC \perp (SOI)$ (do $BC \perp OI, BC \perp SO$), suy ra $(SBC) \perp (SOI)$.

Dựng $OH \perp SI (S \in I)$ thì $OH \perp (SBC)$ và hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên mặt phẳng (SBC) là đường thẳng SI, do đó $OH = d(O,(SBC)) = a$ và $(SO,(SBC)) = OSI = 30^0$ (giả thiết).

Trong tam giác vuông SOE, $SO = \dfrac{OH}{\sin 30^0} = 2a$, $OI = SO \tan 30^0 = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $AB = 2OI = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích của khối chóp

$$S.ABCD : V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3} AB^2.SO = \frac{1}{3}\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2.2a = \frac{32a^3}{9}.$$

2.Tính thể tích của khối chóp $S.EFMN$

EF là đường trung bình trong tam giác SBC nên $EF // BC$ suy ra $EF // AD$ (do $AD // BC$).

$$\begin{cases} EF \parallel AD \\ EF \subset (MEF), AD \subset (SAD) \Rightarrow MN \parallel EF \parallel AD \Rightarrow \dfrac{SN}{SA} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{1}{3} \\ (MEF) \cap (SAD) = MN \end{cases}$$

Ta có : $V_{S.BCD} = V_{S.ABD} = \dfrac{1}{2} V_{S.ABCD}$.

$$\frac{V_{S.EFM}}{V_{S.BCD}} = \frac{SE}{SB}.\frac{SF}{SC}.\frac{SM}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{12} \Rightarrow V_{S.EFM} = \frac{1}{12} V_{S.BCD} = \frac{1}{24} V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.EMN}}{V_{S.BDA}} = \frac{SE}{SB}.\frac{SM}{SD}.\frac{SN}{SA} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{S.EMN} = \frac{1}{18} V_{S.BDA} = \frac{1}{36} V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{S.EFMN} = V_{S.EFM} + V_{S.EMN} = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{36}\right) V_{S.ABCD} = \frac{5}{72} V_{S.ABCD} = \frac{5}{72}.\frac{32a^3}{9} = \frac{20a^3}{81}.$$

Ví dụ 4. 2 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $SBC = 30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo *a*.

Đề thi ĐH Khối D – 2011

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S xuống BC. Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên

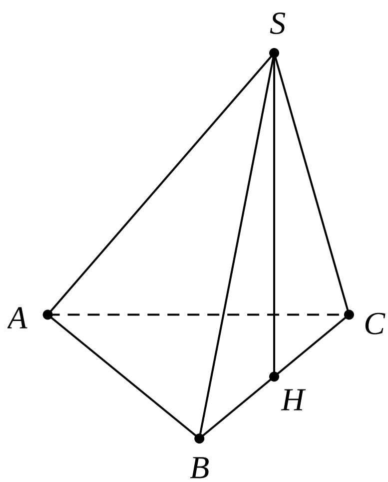
$SH \perp (ABC)$. Ta có $SH = a\sqrt{3}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{\Delta ABC} = 2a^3\sqrt{3}$

Ta có tam giác SAC vuông tại S.

Vì $SA = a\sqrt{21}, SC = 2a, AC = 5a$ và $S_{\Delta SAC} = a^2\sqrt{21}$ nên ta có được

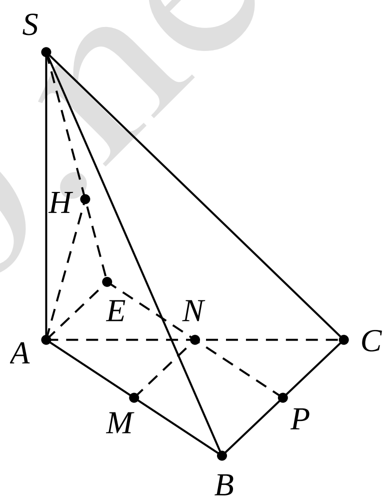
$$d\left(B,(SAC)\right) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{6a}{\sqrt{7}}.$$



Ví dụ 5. 2 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng *(SAB)* và *(SAC)* cùng vuông góc với mặt phẳng *(ABC)*. Gọi *M* là trung điểm của AB; mặt phẳng *SM* và song song với *BC*, cắt *AC* tại *N*. Biết góc giữa hai mặt phẳng *(SBC)* và *(ABC)* bằng 60°. Tính thể tích khối chóp *S.BCNM* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *SN* theo *a* ***Đề thi ĐH Khối A – 2011***

Lời giải.

Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với (ABC) nên $SA \perp (ABC)$, hay SA là đường cao của khối chóp $S.BCNM$.



Ta có : $S_{BCNM} = S_{ABC} - S_{AMN}$

$= 2a^2 - \frac{1}{2}MA.MN = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3a^2}{2}$

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp BC$.

Nên SBA chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), thế thì theo giả thiết ta có $SBA = 60^0$.

Trong tam giác vuông SAB ta có $SA = AB\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}SA.S_{BCNM} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = \sqrt{3}a^3\,(dvtt)$

Gọi P là trung điểm của BC thì $AB//NP, AB \not\subset (SPN)$ nên $AB//(SPN)$ do đó $d(AB,SN) = d(AB;(SPN)) = d(A;(SPN))$

Từ A hạ $AE \perp NP, E \in PN$ thì $\begin{cases} PN \perp AE \\ PN \perp SA \end{cases} \Rightarrow PN \perp (SAE)$;

Hạ $AH \perp SE$ thì $AH \perp (SPN) \Rightarrow d(A;(SPN)) = AH$.

Ta có $AE = NP = a; SA = 2a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{13}{12a^2}$

$\Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{12}{13}}$. Vậy $d\left(A;\left(SPN\right)\right) = a\sqrt{\frac{12}{13}}$.

Ví dụ 6.2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SAC) và (SCD) tạo với đáy lần lượt các góc 60^0 và 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

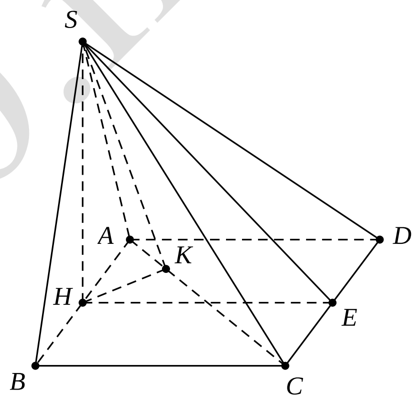
Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD}$

Vẽ $HK \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow SKH$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt đáy nên $SKH = 60^0$.

Vẽ $HE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow SEH$ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(SCD\right)$ và mặt đáy nên $SEH = 30^0$.

Đặt $AB = x$, trong tam giác SHE ta



có: $SH = HE.\tan 30^0 = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ (1)

Ta có $\Delta AKH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{KH}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow KH = \frac{ax}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$

Trong tam giác SHK ta có: $SH = HK \tan 60^0 = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V = \frac{1}{3}SH.AB.AD = \frac{1}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{3}.a.x = \frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt bên (SBC) là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$. Biết góc $BAC = 120^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác SAC cân tại S, $SBC = 60^0$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với $\left(ABC\right)$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với điểm H là trung điểm của AO. Mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc 60^0 và $SC = a$. Tính $V_{S.ABCD}$ và $d\left(AB, SC\right)$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi ; hai đường chéo $AC = 2a\sqrt{3}, BD = 2a$ và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

5. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại C có $AB = 2a$, $AC = a$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) tạo với nhau một góc 60^0. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy , hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân $AB = BC = a$, đường cao $SA = a$. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A

của tam giác SAC. Chứng minh $SC \perp (AB'C')$ và tính thể tích khối chóp $S.AB'C'$.

8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác cân tại A, độ dài trung tuyến $AD = a$, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) góc β. Tính thể tích khối chóp đó.

9. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác cân $AB = AC$, cạnh $BC = a, \widehat{BAC} = \alpha$. Các cạnh bên cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc β. Tính thể tích khối chóp theo a, α, β.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp $S.BCMN$.

Bài 2

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = 5a, BC = 6a$, $CA = 7a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$ Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết:

a) Cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc 60^0

b) Cạnh bên bằng $2a$ và $SA \perp BM$, với M là trung điểm SC.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $AB = BD = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $BM = \frac{2}{3}SB$, giả sử N là điểm di động trên cạnh AD. Tìm vị trí của điểm N để $BN \perp DM$ và khi đó tính thể tích của khối tứ diện $BDMN$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, tam giác SAD đều có cạnh bằng $2a, BC = 3a$. Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC.

Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện $ANIB$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $SA \perp (ABCD), SC$ tạo với mặt phẳng đáy góc 45^0 và tạo với mặt phẳng (SAB) góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$ $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC, E là giao điểm của mặt phẳng (DMN) với cạnh bên SB.

Tính thể tích khối chóp $S.DMEN$ theo a biết rằng $DMN = 30^0$.

8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a.

a) Hãy tính thể tích của khối chóp , diện tích toàn phần và diện tích mặt chéo của hình chóp $SABCD$.

b) Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0 và cạnh đáy bằng a.

a) Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

b) Qua A dựng mặt phẳng (P) vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a và đường cao bằng h. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. (P) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

a) h phải thỏa mãn điều kiện gì để C' là một điểm thuộc cạnh SC.

b) Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$.

c) Chứng minh tam giác $B'C'D'$ luôn có một góc tù.

Bài 3

1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tính thể tích khối chóp biết

a) Cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$ và mặt bên tạo với đáy một góc 60^0

b) Đường cao của hình chóp tạo với đáy một góc 45^0 và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng $2a$.

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy. Tính thể tích của khối chóp biết:

a) Cạnh bên bằng b, góc giữa mặt bên và mặt đáy là α.

b) Cạnh đáy bằng a, khoảng cách từ trung điểm của SH đến mặt phẳng (SCD) bằng k.

3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, khoảng cách giữa cạnh đáy và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD.
a)Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP.
b)Tính theo a thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

5. Một hình chóp $S.ABC$ có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tam giác ABC là một tam giác cân đỉnh A, trung tuyến $AD = a$, đường thẳng SB hợp với mặt phẳng (ABC) một góc bằng α và hợp với mặt phẳng (SAD) một góc bằng β.

a) Xác định các góc α, β.

b) Chứng minh $SB^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2$.

c) CM thể tích của khối chóp $S.ABC: V = \frac{a^3 \sin\alpha \sin\beta}{3\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SC hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB một góc β.

a) Chứng minh rằng $SC^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

b) Tính thể tích của khối chóp đã cho.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có góc nhọn A bằng α. Hai mặt bên $(SAB),(SAD)$ vuông góc với mặt phẳng chứa đáy, hai mặt bên còn lại hợp với mặt phẳng đáy góc β. Cho $SA = a$.
a)Tính diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$.
b) Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.
c) Gọi φ là góc hợp bởi đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC). Chứng tỏ rằng

$$\sin\varphi = \frac{\cot\beta.\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cot^2\beta}}.$$

Bài 4 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC). Tính thể tích của khối chóp biết

1. Cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b.

2. Cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là α.

3. Chiều cao bằng h và $ASB = \beta$.

4. Trung đoạn bằng d, góc giữa cạnh bên và mặt đáy là φ.

Bài 5

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt SBC và ABC là những tam giác đều cạnh a, góc giữa hai mặt phẳng đó là 60^0. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

2. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B, BA = a$, $BC = 2a, SA = 2a, SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng (SAB).

3. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC') biết rằng $(SBC) \perp (AB'C')$.

Bài 6

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và điểm H chia đoạn MN theo tỉ số $-\frac{1}{3}$. Mặt phẳng (SAB) tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAC) biết rằng $SH \perp (ABCD)$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh $\sqrt{5}a$, $AC = 4a, SO = 2\sqrt{2}a$ và SO vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông với đáy lớn AB, đường cao AD. Các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy một góc φ và chân đường cao I của hình chóp nằm trong hình thang $ABCD$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) biết rằng $IC = 3a, IB = 4a$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 7 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có góc ở đáy của một mặt bên là $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, chiều cao $SH = h$ (H là giao điểm của AC và BD.).

1. Tính diện tích xung quanh của hình chóp và thể tích của khối chóp S.ABCD theo h và α. Tìm điều kiện của α để bài toán có nghĩa.

2. Gọi I là trung điểm của SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SH và CI theo h và α.
3. Cho điểm M di động trên cạnh SC. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (MAB).

Bài 8 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên là a, góc giữa mặt bên và mặt đáy (ABC) là $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

1.Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a và α.

2. Cho a không đổi và α biến thiên trong khoảng $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, khi đó tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $SABC$.
3. Xác định α để hình chóp $S.ABC$ trở thành tứ diện đều.
Bài 9

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $ASB = 60^0$, $BSC = 90^0$, $CSA = 120^0$. Gọi E là trung điểm của SB. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$; góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CE.

2. Cho khối chóp $S.ABC$, đáy ABC có $AB = a, AC = b$, $BAC = \alpha$. Cạnh bên $SA = c$ và $SAB = SAC = \beta$, $(0 < \beta < 90^0)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

3. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = x$. Trên đường thẳng $\Delta \perp (ABC)$ tại điểm M, lấy S sao cho $MS = MA$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Mặt phẳng (SMI) cắt đường thẳng AC tại N $(NA > NC)$. Tìm x để $V_{SMBI} + V_{SCNI} = V_{SABC}$.

4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, mặt bên có góc ở đáy là $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng diện tích của thiết diện qua một cạnh bên và đường cao vẽ từ S của hình chóp đã cho là

$$\frac{a^2}{4\cos\alpha}\sqrt{\sin\left(\alpha+30^0\right)\sin\left(\alpha-30^0\right)}.$$

Bài 10 Cho hình chóp đều $S.ABCD$, đường cao SH. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ biết:
1.Cạnh đáy bằng a và khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b

2. Cạnh bên bằng b và mặt bên tạo với đáy một góc α $\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$. Đồng thời hãy xác định α để $V_{S.ABCD}$ lớn nhất.

Bài 11

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SBD) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích khối chóp $S.AMPN$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là điểm H thuộc đoạn $AC, AH = \dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo *a*.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 2a, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a .Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Bài 12

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 3a, AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm AD, biết hai mặt phẳng

(SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a, CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $ABC = BAD = 90^0$

$BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến (SCD).

Bài 13 Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh đáy $AB = 5a, BC = 6a,$ $AC = 7a$. Các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC). Biết hình chiếu của đỉnh S thuộc miền trong tam giác ABC.

Bài 14

1. Cho tứ diện ABCD với năm cạnh có độ dài bằng a và cạnh $AD = x, 0 < x < a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối tứ diện ABCD và tìm x theo a để thể tích đó đạt giá trị lớn nhất.

2. Gọi V là thể tích của khối tứ diện ABCD có các cạnh thỏa mãn điều kiện $AB = CD = a, AC = BD = b,\ AD = BC = c$. Chứng minh :

$$V \le \frac{\sqrt{2}abc}{12}.$$

3. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b,$ $AD = BC = c$. Tính thể tích của khối tứ diện.

Bài 15

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a,

$SA = SB = SC = a$. Tính SD theo a để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $ASB = \alpha$, $BSC = \beta, CSA = \gamma$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, α, β, γ.

3. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có cạnh $SC = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng $a, (0 < x < a\sqrt{3})$. Tính thể tích khối chóp và tìm x theo a để thể tích đó lớn nhất.