Vấn đề 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Phương pháp:

1) Để lập phương trình của một (P) ta cần tìm một điểm mà (P) đi qua và một VTPT của (P). Khi tìm VTPT của (P) chúng ta cần lưu ý một số tính chất sau :

• Nếu giá của hai véc tơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ có giá song song hoặc nằm trên (P) thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một VTPT của (P).

• Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì VTPT của mặt phẳng này cũng là VTPT của mặt phẳng kia.

• Nếu (P) chứa (hoặc song song) với AB thì giá của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ sẽ nằm trên (hoặc song song) với (P).

• Nếu $(P) \perp (Q)$ thì VTPT của mặt phẳng này sẽ có giá nằm trên hoặc song song với mặt phẳng kia.

• Nếu $(P) \perp AB$ thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTPT của (P).

• Thông thường để lập phương trình mặt phẳng ta thường đi tìm cặp véc tơ có giá song song hoặc nằm trên (P), từ đó tìm được VTPT của (P).

2) Các trường hợp đặc biệt

• Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm không trùng với gốc tọa độ

$A(a;0;0), B(0;b;0), \quad C(0;0;c)$ có phương trình $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1.$

• Các mặt phẳng tọa độ (Oyz) : $x = 0$, (Ozx) : $y = 0$, (Oxy) : $z = 0$.

• Mặt phẳng (α) qua gốc tọa độ $Ax + By + Cz = 0$.

• Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ trục Ox có dạng

$$By + Cz + D = 0.$$

• Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ trục Oy có dạng

$$Ax + Cz + D = 0.$$

• Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ trục Oz có dạng

$$Ax + By + D = 0.$$

• Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

$$Cz + D = 0.$$

- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

$$Ax + D = 0.$$

- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ với mặt phẳng (Ozx) có phương trình là

$$By + D = 0.$$

Ví dụ 1.2.6 Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trọng tâm tam giác là $G(3;\ 6;\ 1)$ và trung điểm của BC là $M(4;\ 8;\ -1)$. Đường thẳng BC nằm trong mặt phẳng $2x + y + 2z - 14 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Lời giải.

Gọi tọa độ $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$.

Ta có: $\overrightarrow{GA}(x_A - 3;\ y_A - 6;\ z_A - 1)$, $\overrightarrow{MG}(-1;\ -2;\ 2)$.

Vì $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{MG}$ nên $\begin{cases} x_A - 3 = -2 \\ y_A - 6 = -4 \\ z_A - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = 2 \\ z_A = 5 \end{cases} \Rightarrow A(1;\ 2;\ 5).$

Do B thuộc mặt phẳng $2x + y + 2z - 14 = 0 \Rightarrow B(a;\ 14 - 2a - 2b;\ b)$.

Suy ra $\overrightarrow{MB}(a - 4;\ 6 - 2a - 2b;\ b + 1)$, $\overrightarrow{MA}(-3;\ -6;\ 6)$.

Tam giác ABC vuông cân tại A nên phải cĩ:

$$\begin{cases} MA \perp MB \\ MA = MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \\ \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(a-4) - 6(6 - 2a - 2b) + 6(b+1) = 0 \\ (a-4)^2 + (6 - 2a - 2b)^2 + (b+1)^2 = 81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ (2 + 2b)^2 + (2 + 2b)^2 + (b+1)^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ (b+1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ \left[\begin{array}{l} b + 1 = 3 \\ b + 1 = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2;\ a = -2 \\ b = -4;\ a = 10 \end{array}\right..$$

Nếu $a = -2;\ b = 2$ thì $B(-2;\ 14; 2)$, $C(10;\ 2;\ -4)$.

Nếu $a = 10;\ b = -4$ thì $B(10;\ 2;\ -4)$, $C(-2;\ 14; 2)$.

Ví dụ 2.2.6 Trong không gian tọa độ $Oxyz$,

1. Cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

2. Cho các điểm $A(5;\ 3;\ -1),\ C(2;3;\ -4)$ là các đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ điểm D biết điểm B nằm trên mặt phẳng có phương trình $(\alpha):\ x+y-z-6=0$.

Lời giải.

1. Phương trình $(ABC): \frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Vì $(ABC)\perp(P) \Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0 \Leftrightarrow b=c \Rightarrow (ABC): bx+y+z-b=0$.

Mà $d(O,(ABC))=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{b^2+2}}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$ (do $b>0$).

Vậy $b=c=\frac{1}{2}$ là giá trị _an tìm.

2. Tâm hình vuông $I\left(\frac{7}{2};\ 3;\ -\frac{5}{2}\right)$.

Gọi $B(x;\ y;\ z)$ thì $\overrightarrow{AB}(x-5;\ y-3;\ z+1),\ \overrightarrow{CB}(x-2;\ y-3;\ z+4)$.

Ta có $\begin{cases} B\in(\alpha) \\ AB=CB \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z-6=0 \\ x+z-1=0 \\ (x-5)(x-2)+(y-3)^2+(z+1)(z+4)=0 \end{cases}$

Giải ra ta có $B(2;\ 3;\ -1)$ hoặc $B(3;\ 1;\ -2)$.

Suy ra các điểm cần tìm tương ứng là $D(5;\ 3;\ -4)$ hoặc $D(4;\ 5;\ -3)$.

Ví dụ 3.2.6 Trong không gian $Oxyz$

1. Cho 2 điểm $A(2;0;1),B(0;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=3$ ***Đề thi ĐH Khối A – 2011***

2. Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết B thuộc (S) và tam giác OAB đều. ***Đề thi ĐH Khối A – 2011***

Lời giải.

1. Gọi E là trung điểm AB ta có: $E(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)$

Phương trình mặt phẳng trung trực (Q) của AB có phương trình: $x+y-z+2=0$.

Vì $MA=MB$ nên suy ra $M\in(Q)\Rightarrow M\in(P)\cap(Q)$

Gọi $M(a;b;c)$ suy ra: $\begin{cases}2a-b-c+4=0\\ a+b-c+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=3+\dfrac{3}{2}a\\ b=1+\dfrac{1}{2}a\end{cases}$

Mặt khác: $MA^2=9\Rightarrow(a-2)^2+\left(\dfrac{1}{2}a+1\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}a+2\right)^2=9$.

Giải ra ta được $a=0, a=-\dfrac{6}{7}$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $M\left(0;1;3\right)$, $M\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$.

2. Xét $B(a;b;c)$. Vì tam giác AOB đều nên ta có hệ:

$\begin{cases}OA=OB\\ OA=AB\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2=32\\ (a-4)^2+(b-4)^2+c^2=32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b-4=0\\ c^2=32-a^2-b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4-b\\ c^2=16-2b^2+8b\end{cases}$

Mà $B\in(S)$ nên : $a^2+b^2+c^2-4a-4b-4c=0$

$\Leftrightarrow(4-b)^2+b^2+16-2b^2+8b-4(4-b)-4b-4c=0$

Hay $c=4\Rightarrow b^2-4b=0\Rightarrow b=0, b=4$. Do đó $B(4;0;4)$ hoặc $B\left(0;4;4\right)$.

- $B\left(0;4;4\right)$ ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=\left(16;-16;16\right)$ nên phương trình (OAB):

$$x-y+z=0.$$

- $B(4;0;4)$ ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=\left(16;-16;-16\right)$ nên phương trình (OAB):

$$x-y-z=0.$$

Ví dụ 4.2.6 Trong không gian $Oxyz$

1. Cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và $(Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng $\sqrt{2}$

2. Cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;0;1)$

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C và tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC

b) Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-3=0$ sao cho $MA=MB=MC$

Lời giải.

1. Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$ là VTPT, mp(Q) có $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;1)$ là VTPT.

Do $\begin{cases}(R)\perp(P)\\(R)\perp(Q)\end{cases} \Rightarrow mp(R)$ có $\overrightarrow{n_R}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(1;0;-1)$ là VTPT

Suy ra $(R): x-z+m=0$

Ta có $d(O;(R))=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+0+1}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\pm 2$

Vậy $(R): x-z\pm 2=0$.

2. a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1), \overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;-8)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Phương trình $mp(ABC): x+2y-4z+6=0$.

Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow H\in(ABC) \Rightarrow a+2b-4c+6=0$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{CH}=(a;b-1;c-2)$, $\overrightarrow{BH}=(a-2;b+2;c-1)$

Vì $\begin{cases}CH\perp AB\\BH\perp AC\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-3b-c+5=0\\2a+b+c-3=0\end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=0; b=1; c=2$.

Vậy $H(0;1;2)$.

b) Giả sử $M(a;b;c)\in(P) \Rightarrow 2a+2b+c-3=0$ (3)

Do $\begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MB^2 = MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b-4c+5=-4a+4b-2c+9 \\ -4a+4b-2c+9=4a-2c+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b-c=2 \\ 2a-b=1 \end{cases}$ (4).

Từ (3) và (4) ta tìm được: $a=2; b=3; c=-7$

Vậy $M(2;3;-7)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 5.2.6 Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;0;0)$, $M(0;-3;6)$.

1. Chứng minh rằng mặt phẳng $(P): x+2y-9=0$ tiếp xúc với mặt cầu tâm M bán kính MO. Tìm toạ độ tiếp điểm ?

2. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, M và cắt các trục Oy, Oz tại các điểm tương ứng B, C sao cho $V_{OABC}=3$

Lời giải.

1. Ta có $OM = 3\sqrt{5}$

Do $d(M,(P)) = \dfrac{|2.(-3)-9|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 3\sqrt{5} = OM$, suy ra (P) tiếp xúc với mặt cầu tâm bán kính OM .

Gọi $H(a;b;c)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow H \in (P) \Rightarrow a+2b-3=0$ (1)

Mặt khác $OH \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{OH} // \overrightarrow{n_P} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2} = t \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=t; b=2t \\ c=0 \end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $t+4t-3=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{3}{5}$. Vậy $H\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$.

2. Giả sử $B(0;b;0), C(0;0;c)$. Vì $mp(Q)$ đi qua A, B, C nên phương trình của : $(Q): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì $M \in (Q) \Rightarrow \dfrac{-3}{b}+\dfrac{6}{c}=1 \Rightarrow c=\dfrac{6b}{b+3}$ (2)

Khi đó: $V_{OABC} = \dfrac{1}{3}OA.OB.OC = \dfrac{1}{6}.2.|bc| = 3 \Rightarrow |bc| = 9$ (3)

Thay (2) vào (3) ta có: $2b^2 = 3|b+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2b^2 - 3b - 9 = 0 \\ 2b^2 + 3b + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$.

- $b = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow (Q): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y + 2z - 6 = 0$.
- $b = -\frac{3}{2} \Rightarrow c = -6 \Rightarrow (Q): 3x - 4y - z - 6 = 0$.

Ví dụ 6.2.6 Viết phương trình mặt phẳng (α) biết:
1. (α) đi qua $A(1;-1;1), B(2;0;3)$ và (α) song song với Ox;
2. (α) đi qua $M(3;0;1)$, $N(6;-2;1)$ và (α) tạo với (Oyz) một góc φ thỏa $\cos\varphi = \frac{2}{7}$.

Lời giải.
1. Vì (α) song song với Ox nên phương trình của (α) có dạng:
$$ay + bz + c = 0$$
Do $A, B \in (\alpha)$ nên ta có: $\begin{cases} -a + b + c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3b \\ a = -2b \end{cases}$, chọn
$b = -1 \Rightarrow a = 2, c = 3$
Vậy phương trình của $(\alpha): 2y - z + 3 = 0$.
2. Vì $M \in (\alpha)$ nên phương trình của (α) có dạng:
$$a(x-3) + by + c(x-1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cx - 3a - c = 0 \;\; (1)$$
Do $N \in (\alpha) \Rightarrow 3a - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}a$
Mặt khác $\cos\varphi = \frac{2}{7}$ và $\vec{i} = (1;0;0)$ là VTPT của (Oyz) nên ta có:
$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 49a^2 = 4\left[a^2 + \frac{9}{4}a^2 + c^2\right] = 13a^2 + 4c^2 \Leftrightarrow c = \pm 3a$$
Ta chọn $a = 2 \Rightarrow b = 3, c = \pm 6$.
Từ đó ta có phương trình của (α) là:
$$2x + 3y + 6z - 12 = 0 \text{ hoặc } 2x + 3y - 6z = 0.$$
CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP
Bài 1 Lập phương trình mặt phẳng (P) biết:
1. (P) đi qua $A(1;2;3), B(4;-2;-1), C(3;-1;2)$;

2. (P) là mặt phẳng trung trực đoạn AC (Với A, C ở câu 1);
3. (P) đi qua $M(0;0;1), N(0;2;0)$ và song song với AB ;
4. (P) đi qua các hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ.

Bài 2 Cho hai mặt phẳng có phương trình

$$(\alpha): x - y + z - 4 = 0 \ \& \ (\beta): 3x - y + z - 1 = 0.$$

Lập phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ và mặt phẳng (P)

1. Qua điểm $A(1;8;2)$.
2. Vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 8y + z + 2 = 0$.
3. Tạo với (R): $x + 2y - 2z + 1 = 0$ góc φ với $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{33}}$.

Bài 3 Lập phương trình mặt phẳng (α), biết:
1. (α) đi qua $M(2;3;1)$ và song song với mp(P) : $x - 2y + 3z - 1 = 0$;
2. (α) đi qua $A(2;1;1), B(-1;-2;-3)$ và (α) vuông góc với $(\beta): x + y + z = 0$;
3. (α) chứa trục Ox và vuông góc với $(Q): 2x + 3y - z + 2 = 0$.
4. (α) qua ba điểm $A(2;8;5), B(18;14;0), C(12;8;3)$.
5. (α) là mặt phẳng trung trực của EF với $E(5;2;7)$, $F(1;8;1)$.
6. (α) qua $D(2;3;5)$ và song song với mặt phẳng (Oyz).
7. (α) qua $G(1;-3;2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng

$$(\beta): \ x + 2y - 5z + 1 = 0, \ (\gamma): \ 2x - 3y - z + 4 = 0.$$

8. (α) qua các hình chiếu của điểm $H(-2;1;5)$ trên các trục tọa độ.

Bài 4 . Lập phương trình của (P) trong các trương hợp sau:
1. (P) đi qua $A(1;2;1)$ và song song với $(Q): x + y + 3z - 1 = 0$;
2. (P) đi qua $M(0;1;2)$, $N(0;1;1)$, $E(2;0;0)$;
3. (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN (M, N ở ý 2) ;
4. (P) đi qua các hình chiếu của $A(1;2;3)$ lên các trục tọa độ ;
5. (P) đi qua $B(1;2;0)$, $C(0;2;0)$ và vuông góc với (R): $x + y + z + 1 = 0$;
6. (P) đi qua $D(-1;2;3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng :

$(\alpha): x-2=0$; $(\beta): y-z-1=0$.

Bài 5 Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(3;0;0), B(1;2;1)$, $C(2;-1;2)$.

1. Lập phương trình mặt phẳng qua A, B và cắt trục Oz tại điểm M sao cho diện tích tam giác MAB bằng $\frac{9}{2}$ (đvdt).

2. Lập phương trình mặt phẳng qua C, A và cắt trục Oy tại điểm N sao cho thể tích khối tứ diện $ABCN$ bằng 12 (đvtt).

3. Lập phương trình mặt phẳng (α) qua ba điểm B, C và tâm mặt cầu nội tiếp hình tứ diện $OABC$.

Bài 6 Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1;2;3), B(-2;3;-1)$, $C(0;1;1)$ $D(-4;-3;5)$. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết:

1. (α) đi qua A và chứa Ox

2. (α) đi qua A, B và cách đều hai điểm C, D.

Bài 7 Lập phương trình mặt phẳng (α), biết:

1. (α) đi qua $A(-1;1;1), B(3;0;2)$ và khoảng cách từ $C(1;0;-2)$ đến (α) bằng 2;

2. (α) cách đều hai mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-1=0$, $(Q): x-2y+2z-4=0$

3. (α) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), đồng thời (α) vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 3x+2y-z+5=0$.

Bài 8 Lập phương trình (P) biết (P):

1. Song song với $(Q): 2x-3y-6z-14=0$ và khoảng cách từ O đến (P) bằng 5.

2. Đi qua giao tuyến của hai mp $(\alpha): x-3z-2=0$; $(\beta): y-2z+1=0$, khoảng cách từ $M\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ đến (P) bằng $\frac{7}{6\sqrt{3}}$.

Bài 9 Lập phương trình mặt phẳng (α) biết

1. (α) đi qua $A(1;0;2)$, $B(2;-3;3)$ và tạo với mặt phẳng $(\beta): 4x+y+z-3=0$ một góc 60^0.

2. (α) đi qua $C(2;-3;5)$, vuông góc với $(P): x-5y-z+1=0$ và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x+2y+z-3=0$ góc 45^0.

Bài 10 Cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 3 = 0$ và ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;1;2), C(-1;-1;0)$.

1. Tìm điểm $M \in Ox$ sao cho $d(M,(P)) = 3$.

2. Tìm điểm $N \in Oy$ sao cho điểm N cách đều mặt phẳng (P) và điểm A.

3. Tìm điểm $K \in (P)$ sao cho $KB = KC$ và $KA = \frac{3}{2}$.

4. Tìm điểm $H \in (P)$ sao cho $HA = HB = HC$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 11

1. Tìm m, n để 3 mặt phẳng sau cùng đi qua một đường thẳng:
$(P): x + my + nz - 2 = 0$, $(Q): x + y - 3z + 1 = 0$ và
$(R): 2x + 3y + z - 1 = 0$. Khi đó hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua đường thẳng chung đó và tạo với (P) một góc φ sao cho
$\cos\varphi = \frac{23}{\sqrt{679}}$.

2. Cho ba mặt phẳng: $(\alpha_1): x + y + z - 3 = 0$; $(\alpha_2): 2x + 3y + 4z - 1 = 0$ và $(\alpha_3): x - 2y + 2z + 4 = 0$.

a) Chứng minh các cặp mp (α_1) và (α_2); (α_1) và (α_3) cắt nhau;

b) Viết phương trình (P) đi qua $A(1;0;1)$ và giao tuyến của (α_1) và (α_2);

c) Viết phương trình (Q) đi qua giao tuyến của hai mp (α_1) và (α_2) và đồng thời vuông góc với mp (α_3).

3. Cho ba mặt phẳng $(P): (4-a)x - (a+5)y + az + a = 0$ và $(Q): 2x + 3y + bz + 5 = 0$; $(R): 3x + cy + a(c-a)z + c = 0$.

a) Biện luận vị trí tương đối của hai mặt phẳng (P) và (Q).

b) Tìm a, c để (P) song song với (R).

c) Tìm a, c để (P) qua điểm $A(1;\ 3;\ 2)$ và (P) vuông góc với (R).

Bài 12 Lập phương trình mặt phẳng (α) biết

1. (α) qua hai điểm $A(1;2;-1), B(0;-3;2)$ và vuông góc với $(P): 2x - y - z + 1 = 0$.

2. (α) cách đều hai mặt phẳng $(\beta): x + 2y - 2z + 2 = 0$, $(\gamma): 2x + 2y + z + 3 = 0$.

3. (α) qua hai điểm $C(-1;0;2), D(1;-2;3)$ và khoảng cách từ gốc tọa độ tới mặt phẳng (α) là 2.

4. (α) đi qua $E(0;\ 1;\ 1)$ và $d(A,(\alpha)) = 2; d(B,(\alpha)) = \frac{11}{7}$, trong đó $A(1;2;-1), B(0;-3;2)$.

5. Qua hai điểm $A(1;2;3), B(5;-2;3)$ và (α) tạo với mặt phẳng (β) góc 45^0, với (β): $4x+y-z-2=0$.

6. Qua $C(1;\ -1;\ 1)$, (α) tạo với mặt phẳng (γ): $x-y+2=0$ góc 60^0 đồng thời $d(O,(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Bài 13 Lập phương trình mặt phẳng (α) biết (α)

1. Cách đều hai mặt phẳng

$$(\alpha_1):\ 5x+2y+7z+8=0, (\alpha_2):\ 5x+2y+7z+60=0.$$

2. Song song với (α_3): $6x-3y-2z+1=0$ và khoảng cách từ $A(1;\ 2;\ -1)$ đến mặt phẳng (α) là 1.

3. Qua hai điểm $B(-5;0;-3), C(2;\ -5;0)$ đồng thời (α) các đều hai điểm $M(1;-2;-6)$ và $N(-1;-4;2)$.

4. Qua $D(1;\ -3;\ 1)$, vuông góc với mặt phẳng $3x-2y+2z+4=0$ và $d(E,(\alpha))=3$, với $E(5;\ 2;\ 3)$.

5. Qua $F(4;2;1)$ và $d(I,(\alpha)) = \frac{7}{3}, d(J,(\alpha)) = 1$ trong đó $I(1;\ -1;2)$ và $J(3;\ 4;\ 1)$.