PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC TRÊN TẬP SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Căn bậc hai của số phức:

- Định nghĩa: Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w.

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực:

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$. Xét $\Delta = b^2 - 4ac$, ta có:

- $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm thực được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta < 0$: phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

3. Định lí cơ bản của đại số:

Mọi phương trình bậc n: $A_o z^n + A_1 z^{n-1} + ... + A_{n-1} z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN:

I. Dạng 1: Tìm căn bậc hai của một số phức:

1. Trường hợp w là số thực: Nếu a là một số thực:

+ $a < 0$, a có các căn bậc hai là $\pm i\sqrt{|a|}$.
+ $a = 0$, a có đúng một căn bậc hai là 0.
+ $a > 0$, a có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.

Ví dụ 1: Ta có hai căn bậc hai của – 1 là i và $-i$.

Hai căn bậc hai của $-a^2$ (a là số thực khác 0) là ai và $-ai$.

2. Trường hợp $w = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$:

$z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$ là một căn bậc hai của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là:

$$(x + yi)^2 = a + bi$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Mỗi cặp số thực $(x; y)$ nghiệm đúng hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai $x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

Ví dụ 2: Tìm các căn bậc hai của $w = -5 + 12i$.

Giải: Giả sử $z = x + yi \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ là một căn bậc hai của số phức $w = -5 + 12i$.

Ta có $z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -5+12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy $w = -5 + 12i$ có hai căn bậc hai là $2 + 3i$ và $-2 - 3i$.

II. Dạng 2: Giải phương trình bậc hai với hệ số thực và các dạng toán liên quan:

1. Giải các phương trình bậc hai với hệ số thực:

Ví dụ 3: Giải phương trình bậc hai sau: $z^2 - z + 1 = 0$

Giải: Xét $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

.

2. Giải phương trình quy về phương trình bậc hai với hệ số thực:

Phương pháp 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

- Bước 1: Nhẩm 1 nghiệm đặc biệt của phương trình.

+ Tổng các hệ số trong phương trình là 0 thì phương trình có một nghiệm $x = 1$.

+ Tổng các hệ số biến bậc chẵn bằng tổng các hệ số biến bậc lẻ thì phương trình có một nghiệm $x = -1$.

+ Định lý Bơdu:

Phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$.

Tức là $f(x) = (x-a)g(x) - f(a)$

Hệ quả: Nếu $f(a) = 0$ thì $f(x) \vdots (x-a)$

Nếu $f(x) \vdots (x-a)$ thì $f(a) = 0$ hay $f(x) = 0$ có một nghiệm $x = a$.

- Bước 2: Đưa phương trình về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai bằng cách hân tích đa thức ở vế trái của phương trình thành nhân tử (dùng hằng đẳng thức, chia đa thức hoặc sử dụng lược đồ Hoocne) như sau:

Với đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ chia cho $x - a$ có thương là

$g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$ dư r

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_2	a_1	a_0

a	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=ab_{n-1}+a_{n-2}$	$b_{n-3}=ab_{n-2}+a_{n-3}$		$b_1=ab_2+a_2$	$b_0=ab_1+a_1$	$r=ab_0+b_0$

- Bước 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc bậc hai, kết luận nghiệm

Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ:

- Bước 1: Phân tích phương trình thành các đại lượng có dạng giống nhau.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ, nêu điều kiện của ẩn phụ (nếu có).
- Bước 3: Đưa phương trình ban đầu về phương trình bậc nhất, bậc hai với ẩn mới.
- Bước 4: Giải phương trình, kết luận nghiệm.

3. Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực:

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Ta có hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1.x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ 4: Tính tổng và tích các nghiệm của phương trình sau: $z^2-z+1=0$

Giải: Ta có $\Delta=b^2-4ac=-3<0$ nên phương trình có hai nghiệm phức.

Theo Vi-ét, ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-1 \\ P=x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=1 \end{cases}$

III. Phương pháp sử dụng máy tính giải nhanh các bài toán số phức (cụ thể đối với máy tính CASIO fx-570VN Plus):

1. Chọn chế độ tính toán với số phức: MODE 2 màn hình hiện CMPLX.

Nhập số thuần ảo i: Phím ENG.

2. Tìm các căn bậc hai của một số phức:

Ví dụ 5: Khai căn bậc hai số phức $z=-3-4i$ có kết quả:

Cách 1:

- Mode 2 (CMPLX)
- Nhập hàm X^2
- Sử dụng phím CALC, nhập từng giá trị vào, giá trị nào ra kết quả bằng *z* thì ta nhận.

Cách 2:

- Mode 1 (COMP)

- Nhấn Shift + (Pol), ta nhập $Pol(-3;4)$

- Nhấn Shift – (Rec), ta nhập $\operatorname{Rec}\left(\sqrt{X}, Y:2\right)$, ta thu được kết quả $X=1;Y=2$.

- Vậy 2 số phức cần tìm là $1+2i$ và $-1-2i$.

3. Giải phương trình bậc hai với hệ số thực:

Ví dụ 6: Giải phương trình $z^2-(5-i)z+8-i=0$

A. $z=3-2i; z=2+i$ **B.** $z=3+i; z=-3-i$

C. $z=1-3i; z=-1+3i$ **D.** $z=1+i; z=-1-i$

Chọn chế độ số phức: MODE 2

Nhập vế trái phương trình với biến là X.

Sử dụng CALC để thử lần lượt các đáp án: CALC $\rightarrow 3-2i$. Nếu giá trị phương trình là 0 thì giá trị vừa thử là nghiệm của phương trình. Nếu giá trị phương trình khác 0 thì giá trị vừa thử không là nghiệm của phương trình.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI HỆ SỐ THỰC TRÊN TẬP SỐ PHỨC

I.**NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU** (*tối thiểu 30 câu*):

Câu 1. Giải phương trình $2x^2+x+1=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{7}i\right) \\ x_2=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{7}i\right) \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{7}i\right) \\ x_2=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{7}i\right) \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{7}i\right) \\ x_2=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{7}i\right) \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{7}i\right) \\ x_2=\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{7}i\right) \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\Delta=b^2-4ac=1^2-4.2.1=-7=7i^2<0$ nên phương trình có hai nghiệm phức là:

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{4}$

Vậy ta chọn đáp án A.

Câu 2. Giải phương trình $x^2+(2-3i)x-6i=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x_1=3i \\ x_2=-2 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x_1=-3i \\ x_2=-2+3i \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x_1 = -2+3i \\ x_2 = -2-3i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2-3i \\ x_2 = -2-3i \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2-3i)^2 - 4.1.(-6i) = -5+12i \Rightarrow \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{|-5+12i|} = \sqrt{|4+12i+9i^2|}$$

$$= \sqrt{\left|(2+3i)^2\right|} = 2+3i$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-2+3i+2+3i}{2} = 3i$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-2+3i-2-3i}{2} = -2$$

Vậy ta chọn đáp án A.

Câu 3. Khai căn bậc hai số phức $z = -3+4i$ có kết quả:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1+2i \\ z_2 = -1-2i \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1+2i \\ z_2 = 1-2i \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1+2i \\ z_2 = -1+2i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = -1+2i \\ z_2 = -1-2i \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $w = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là một căn bậc hai của số phức $z = -3+4i$.

Ta có:

$$w^2 = z \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Do đó *z* có hai căn bậc hai là:

$z_1 = 1+2i$

$z_2 = -1-2i$

Ta chọn đáp án A.

Câu 4. Giải phương trình $x^2 - \left(\sqrt{3}-1-i\right)x - \sqrt{3}(1+i) = 0$ có nghiệm:

A. $x_1 = -1-i; x_2 = \sqrt{3}$ **B.** $x_1 = 1-i; x_2 = -\sqrt{3}$

C. $x_1 = 1-i; x_2 = \sqrt{3}$ **D.** $x_1 = 1+i; x_2 = \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 3+2\sqrt{3}+\left(2+2\sqrt{3}\right)i \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm\left(1+\sqrt{3}+i\right)$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{\sqrt{3}-1-i+1+\sqrt{3}+i}{2} = \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{\sqrt{3}-1-i-1-\sqrt{3}-i}{2} = -1-i$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 5. Giải phương trình $z^2-(3+4i)z+(-1+5i)=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1=2+3i \\ z_2=1+i \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z_1=2-3i \\ z_2=1-i \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} z_1=-(2+3i) \\ z_2=-(1+i) \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z_1=2+3i \\ z_2=-1+i \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

$\Delta=b^2-4ac=(3+4i)^2-4.1.(-1+5i)=-3+4i\Rightarrow\sqrt{|\Delta|}=\pm(1+2i)$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{-b+\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{3+4i+1+2i}{2a}=2+3i$

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{3+4i-1-2i}{2a}=1+i$

Ta chọn đáp án A.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $z^3-8=0$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1=2 \\ z_2=-1+\sqrt{3}i \\ z_3=-1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z_1=2 \\ z_2=1+\sqrt{3}i \\ z_3=1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} z_1=-2 \\ z_2=-1+\sqrt{3}i \\ z_3=-1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z_1=-2 \\ z_2=1+\sqrt{3}i \\ z_3=1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Sử dụng hằng đẳng thức số 7, ta có:

$z^3-8=0\Leftrightarrow(z-2)(z^2+2z+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=2 \\ z^2+2z+4=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=2 \\ (z+1)^2=-3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=2 \\ z+1=\sqrt{3}i \\ z+1=-\sqrt{3}i \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=-1+\sqrt{3}i \\ z=-1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$

Ta chọn đáp án A.

Câu 7. Giải phương trình $|z|+z=2+4i$ có nghiệm là:

A. $z=-3+4i$ **B.** $z=-2+4i$

C. $z=-4+4i$ **D.** $z=-5+4i$

Hướng dẫn giải:

Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Thay vào phương trình: $\sqrt{a^2+b^2}+a+bi=2+4i$

Suy ra $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}+a=2\\ b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\ b=4\end{cases}$

Ta chọn đáp án A.

Câu 8. Hai giá trị $x_1=a+bi\,;x_2=a-bi$ là hai nghiệm của phương trình:

A. $x^2-2ax+a^2+b^2=0$ **B.** $x^2+2ax+a^2-b^2=0$

C. $x^2+2ax+a^2+b^2=0$ **D.** $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lý đảo Viet : $\begin{cases}S=x_1+x_2=2a\\ P=x_1.x_2=a^2+b^2\end{cases}$.

Do đó x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+b^2=0$

Ta chọn đáp án A.

Câu 9. Trong $\mathbb{C}$, phương trình z² + 3iz + 4 = 0 có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}z=i\\ z=-4i\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}z=3i\\ z=4i\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}z=1+i\\ z=-3i\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}z=2-3i\\ z=1+i\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

$\Delta=b^2-4ac=(3i)^2-4.1.4=-25<0$

Nên phương trình có hai nghiệm phức là:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{-3i+5i}{2}=i$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{-3i-5i}{2}=-4i$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 10. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^2-z+1=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\ z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}z=\frac{2+\sqrt{3}i}{2}\\ z=\frac{2-\sqrt{3}i}{2}\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}z=\frac{1+\sqrt{5}i}{2}\\ z=\frac{1-\sqrt{5}i}{2}\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}z=3+5i\\ z=3-5i\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4.1.1=-3<0$

Nên phương trình có hai nghiệm phức là:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 11. Tính căn bậc hai của số phức $z = 8+6i$ ra kết quả:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1 = 3+i \\ z_2 = -3-i \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = 3-i \\ z_2 = 3+i \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} z_1 = -3+i \\ z_2 = 3-i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = 3-i \\ z_2 = -3-i \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $w = x+yi\ (x, y \in \mathbb{R})$ là một căn bậc hai của số phức $z = 8+6i$.

Ta có: $w^2 = z \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 8+6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

Do đó *z* có hai căn bậc hai là $\left[\begin{array}{l} z_1 = 3+i \\ z_2 = -3-i \end{array}\right.$

Ta chọn đáp án A.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $z^2 + \sqrt{5} = 0$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1 = \sqrt[4]{5}i \\ z_2 = -\sqrt[4]{5}i \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = \sqrt{5} \\ z_2 = -\sqrt{5} \end{array}\right.$ **C.** $\sqrt{5}i$ **D.** $-\sqrt{5}i$

Hướng dẫn giải:

$z^2 + \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\sqrt{5} \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt[4]{5}$

Ta chọn đáp án A.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $z^2 = -5+12i$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1 = 2+3i \\ z_2 = -2-3i \end{array}\right.$ **B.** $z = 2+3i$

C. $z = 2-3i$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = 2-3i \\ z_2 = -2+3i \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $z = x+yi\ (x, y \in \mathbb{R})$ là một nghiệm của phương trình.

$z^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy = -5 + 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -3 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Do đó phương trình có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} z_1 = 2 + 3i \\ z_2 = -2 - 3i \end{array}\right.$

Ta chọn đáp án A.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1 = -2 - i \\ z_2 = -2 + i \end{array}\right.$ **B.** $z = -2 - i$

C. $z = 2 - i$ **D.** $z = -2 + i$

Hướng dẫn giải:

$z^2 + 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z + 2)^2 = -1 \Leftrightarrow z + 2 = \pm i \Leftrightarrow z = -2 \pm i$

Ta chọn đáp án A.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1 = 2 + i \\ z_2 = -i \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = i - 2 \\ z_2 = -i \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = 2 - i \\ z_2 = -i \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

$$z^2 - 2z + 1 - 2i = 0 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = 2i \Leftrightarrow z - 1 = \pm(1 + i) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 + 1 + i = 2 + i \\ z = 1 - 1 - i = -i \end{array}\right.$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 16. Cho $z = 3 + 4i$. Tìm căn bậc hai của z:

A. $2 + i$ và $-2 - i$ **B.** $2 + i$ và $2 - i$

C. $-2 + i$ và $2 - i$ **D.** $\sqrt{3} + 2i$ và $-\sqrt{3} - 2i$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là một căn bậc hai của số phức $z = 3 + 4i$.

Ta có:

$$w^2 = z \Leftrightarrow (x + yi)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Do đó z có hai căn bậc hai là $\left[\begin{array}{l} z_1 = 2 + i \\ z_2 = -2 - i \end{array}\right.$

Ta chọn đáp án A.

Câu 17. Cho $z=1-i$. Tìm căn bậc hai dạng lượng giác của z:

A. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\pi}{8}+i\sin\frac{-\pi}{8}\right)$ và $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$

B. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

C. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

D. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ và $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\pi}{8}+i\sin\frac{-\pi}{8}\right)$

Hướng dẫn giải:

Ta có $z=1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ có các căn bậc hai là:

$w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right); w_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\pi}{8}+i\sin\frac{-\pi}{8}\right)$

Ta chọn đáp án A.

Câu 18. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $(z^2+i)(z^2-2iz-1)=0$ có nghiệm là:

A. $\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, i

B. 1 - i ; -1 + i ; 2i

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2i)$; $\frac{\sqrt{3}}{2}(-2+i)$; 4i

D. 1 - 2i ; -15i ; 3i

Hướng dẫn giải:

$$(z^2+i)(z^2-2iz-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=-i \\ (z-i)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{\pm(1-i)}{\sqrt{2}} \\ z=i \end{array}\right.$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 19. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4-6z^2+25=0$ có nghiệm là:

A. $\pm(2+i);\pm(2-i)$ **B.** $\pm3;\pm4i$ **C.** $\pm5;\pm2i$ **D.** $\pm8;\pm5i$

Hướng dẫn giải:

$$z^4-6z^2+25=0 \Leftrightarrow (z^2-3)^2+16=0 \Leftrightarrow z^2-3=\pm4i \Leftrightarrow z^2=3\pm4i \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm(2+i) \\ z=\pm(2-i) \end{array}\right.$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 20. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z+\frac{1}{z}=2i$ có nghiệm là:

A. $(1\pm\sqrt{2})i$ **B.** $(5\pm\sqrt{2})i$ **C.** $(1\pm\sqrt{3})i$ **D.** $(2\pm\sqrt{5})i$

Hướng dẫn giải:

$$z+\frac{1}{z}=2i\Leftrightarrow\begin{cases}z\neq 0\\ z^2-2iz+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z\neq 0\\ (z-i)^2+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z\neq 0\\ z-i=\pm\sqrt{2}i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z\neq 0\\ z=\left(\pm\sqrt{2}+1\right)i\end{cases}\Leftrightarrow z=\left(1\pm\sqrt{2}\right)i$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 21. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^3+1=0$ có nghiệm là:

A. -1 ; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ **B.** -1; $\frac{2\pm i\sqrt{3}}{2}$ **C.** -1; $\frac{1\pm i\sqrt{5}}{4}$ **D.** -1; $\frac{5\pm i\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải:

$$z^3+1=0\Leftrightarrow(z+1)\left(z^2-z+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1\\ z^2-z+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1\\ z=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

Ta chọn đáp án A

Câu 22. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4-1=0$ có nghiệm là:

A. $\pm1;\pm i$ **B.** $\pm2;\pm 2i$ **C.** $\pm3;\pm 4i$ **D.** $\pm1;\pm 2i$

Hướng dẫn giải:

$$z^4-1=0\Leftrightarrow(z-1)(z+1)\left(z^2+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\ z=-1\\ z^2+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\ z=-1\\ z=\pm i\end{array}\right.$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 23. Căn bậc hai của -121 là:

A. $11i$ và $-11i$ **B.** $11i$ **C.** -11 **D.** $-11i$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z=-121\Leftrightarrow z=(11i)^2$. Do đó z có hai căn bậc hai là $z_1=11i; z_2=-11i$

Ta chọn đáp án A.

Câu 24. Phương trình $8z^2-4z+1=0$ có nghiệm là:

A. $z_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i;\ z_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ **B.** $z_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i;\ z_2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i$

C. $z_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i;\ z_2=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}i$ **D.** $z_1=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}i;\ z_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

Hướng dẫn giải:

$$\Delta'=b'^2-ac=4-8=-4<0\Rightarrow z_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{|\Delta'|}}{a}=\frac{2\pm 2i}{8}=\frac{1}{4}\pm\frac{i}{4}$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 25. Biết $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $2z^2+\sqrt{3}z+3=0$. Khi đó giá trị của $z_1^2+z_2^2$ là:

A. $-\frac{9}{4}$ **B.** 9 **C.** 4 **D.** $\frac{9}{4}$

Hướng dẫn giải:

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ P=z_1.z_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{2} \end{cases}$

$z_1^2+z_2^2=S^2-2P=\frac{3}{4}-3=-\frac{9}{4}$

Ta chọn đáp án A.

Câu 26. Phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm phức là $z=1+2i$. Tổng 2 số a và b bằng:

A. 3 **B.** -3 **C.** 0 **D.** -4

Hướng dẫn giải:

Vì $z=1+2i$ là một nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ nên ta có:

$(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0 \Leftrightarrow a+b+2ai=3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 2a=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$

$\Rightarrow a+b=-2+5=3$

Ta chọn đáp án A.

Câu 27. Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Khi đó phần thực của $z_1^2+z_2^2$ là:

A. 6 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 7

Hướng dẫn giải:

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\frac{b}{a}=4 \\ P=z_1.z_2=\frac{c}{a}=5 \end{cases}$

$z_1^2+z_2^2=S^2-2P=16-2.5=6$

Ta chọn đáp án A.

Câu 28. Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+4=0$. Khi đó $A=|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng:

A. 8 **B.** -8 **C.** -4 **D.** -7

Hướng dẫn giải:

$z^2+2z+4=0 \Leftrightarrow (z+1)^2+3=0 \Leftrightarrow z=-1\pm\sqrt{3}i$

$\Rightarrow A=|z_1|^2+|z_2|^2=8$

Ta chọn đáp án A.

Câu 29. Phương trình $z^3=8$ có bao nhiêu nghiệm phức với phần ảo âm?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

$z^3=8 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+2z+4)=0 \Leftrightarrow (z-2)\left[(z+1)^2+3\right]=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ z=-1\pm\sqrt{3}i \end{cases}$

Do đó phương trình chỉ có một nghiệm phức có phần ảo âm.

Ta chọn đáp án A.

Câu 30. Giải phương trình $z^2+(1-i)z-18+13i=0$

A. $z=4-i; z=-5+2i$ **B.** $z=4-i; z=-5-2i$

C. $z=4-i; z=5-2i$ **D.** $z=4+i; z=5-2i$

Hướng dẫn giải:

$\Delta=b^2-4ac=(1-i)^2+4(18-13i)=72-54i=(9-3i)^2$

$\Rightarrow z_1=\dfrac{-b+\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{i-1+9-3i}{2}=4-i$

$z_2=\dfrac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{i-1-9+3i}{2}=-5+2i$

Ta chọn đáp án A.

Câu 31. Biết z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2+\sqrt{3}z+3=0$. Khi đó giá trị của $z_1^2+z_2^2$ là:

A. $-\dfrac{9}{4}$ **B.** $\dfrac{9}{4}$ **C.** 9 **D.** 4

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lý Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ P=z_1z_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$z_1^2+z_2^2=S^2-2P=\dfrac{3}{4}-3=-\dfrac{9}{4}$

Ta chọn đáp án A.

Câu 32. Phương trình sau có mấy nghiệm thực: $z^2+2z+2=0$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số nghiệm.

Hướng dẫn giải:

$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - 2 = -1 < 0$ nên phương trình vô nghiệm trên tập số thực.

Ta chọn đáp án A.

Câu 33. Tìm các căn bậc hai của -9.

A. $\pm 3i$ **B.** 3 **C.** $3i$ **D.** -3

Hướng dẫn giải:

Ta có $-9 = 9.i^2$ nên -9 có các căn bậc hai là $3i$ và $-3i$.

Ta chọn đáp án A.

Câu 34. Phương trình $z^2 - (5-i)z + 8 - i = 0$ có nghiệm là:

A. $z = 3-2i$ hoặc $z = 2+i$ **B.** $z = 1-2i$ hoặc $z = -1+3i$

C. $z = 1+i$ hoặc $z = -1-i$ **D.** $z = 3+i$ hoặc $z = -3-i$

Hướng dẫn giải:

$\Delta = b^2 - 4ac = (5-i)^2 - 4(8-i) = -8 - 6i$

$\sqrt{|\Delta|} = \pm(1-3i)$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{-b+\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{5-i+1-3i}{2} = 3-2i$$

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{5-i-1+3i}{2} = 2+i$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 35. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4 + 4 = 0$ có nghiệm là:

A. $\pm(1-i)$; $\pm(1+i)$ **B.** $\pm(1-2i)$; $\pm(1+2i)$

C. $\pm(1-3i);\pm(1+3i)$ **D.** $\pm(1-4i);\pm(1+4i)$

Hướng dẫn giải:

$$z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 2i \\ z^2 = -2i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm(1+i) \\ z = \pm(1-i) \end{array}\right.$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 36. Giải phương trình $z^2 - 2z + 7 = 0$ trên tập số phức ta được nghiệm là:

A. $z = 1 \pm \sqrt{6}i$ **B.** $z = 1 \pm 2\sqrt{2}i$ **C.** $z = 1 \pm \sqrt{2}i$ **D.** $z = 1 \pm \sqrt{7}i$

Hướng dẫn giải:

$z^2 - 2z + 7 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{6}i$

Ta chọn đáp án A.

Câu 37. Căn bậc hai của số phức $4 + 6\sqrt{5}i$ là:

A. $\pm\left(3+\sqrt{5}i\right)$ **B.** $\left(3+\sqrt{5}i\right)$ **C.** $-\left(3+\sqrt{5}i\right)$ **D.** 2

Hướng dẫn giải:

Giả sử w là một căn bậc hai của $4 + 6\sqrt{5}i$. Ta có:

$w^2 = 4 + 6\sqrt{5}i \Leftrightarrow w^2 = \left(3+\sqrt{5}i\right)^2 \Leftrightarrow w = \pm\left(3+\sqrt{5}\right)i$.

Ta chọn đáp án A.

Câu 38. Gọi z là căn bậc hai có phần ảo âm của $33-56i$. Phần thực của z là:

A. 7 **B.** 6 **C.** 4 **D.** -4

Hướng dẫn giải:

Ta có: $33-56i=(7-4i)^2 \Rightarrow z=7-4i$

Do đó phần thực của z là 7.

Ta chọn đáp án A.

Câu 39. Tập nghiệm trong $\mathbb{C}$ của phương trình $z^3+z^2+z+1=0$ là:

A. $\{-i;i;-1\}$ **B.** $\{-i;i;1\}$ **C.** $\{-i;-1\}$ **D.** $\{-i;i;1;-1\}$

Hướng dẫn giải:

$$z^3+z^2+z+1=0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=\pm i \end{array}\right.$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 40. Trên tập số phức, phương trình bậc hai có hai nghiệm $\alpha=4+3i;\beta=-2+i$ là:

A. $z^2-(2+4i)z-(11+2i)=0$ **B.** $z^2+(2+4i)z-(11+2i)=0$

C. $z^2-(2+4i)z+(11+2i)=0$ **D.** $z^2+(2+4i)z+(11+2i)=0$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lý Viet, ta có: $\begin{cases} S=\alpha+\beta=2+4i \\ P=\alpha.\beta=-11-2i \end{cases}$.

Do đó α,β là hai nghiệm của phương trình:

$$z^2-Sz+P=0 \Leftrightarrow z^2-(2+4i)z-(11+2i)=0$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 41. Gọi z là nghiệm phức có phần thực dương của phương trình $z^2+(1+2i)z-17+19i=0$. Khi đó, giả sử $z^2=a+bi$ thì tích của a và b là:

A. -168 **B.** 168 **C.** 0 **D.** -4

Hướng dẫn giải:

$$\Delta=b^2-4ac=(1+2i)^2+4(17-19i)=65-72i$$

$$\Rightarrow \sqrt{|\Delta|}=\pm(9-4i)$$

$$\Rightarrow z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{-1-2i\pm(9-4i)}{2}\Rightarrow z=\frac{8-6i}{2}=4-3i\Rightarrow z^2=(4-3i)^2=7-24i$$

$$\Rightarrow a=7;b=-24\Rightarrow a.b=-168$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 42. Có bao nhiêu số phức thỏa mãn điều kiện $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$?

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ là số phức thỏa mãn điều kiện trên. Ta có:

$$z^2 = |z|^2 + \bar{z} \Leftrightarrow \left(a+bi\right)^2 = a^2 + b^2 + a - bi \Leftrightarrow a + 2b^2 - bi - 2abi = 0 \Leftrightarrow \left(a + 2b^2\right) + \left(-b - 2ab\right)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b^2 = 0 \\ b + 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b^2 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \pm\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta chọn đáp án A.

Câu 43. Phương trình $\left(2+i\right)z^2 + az + b = 0\left(a, b \in \mathbb{C}\right)$ có hai nghiệm là $3+i$ và $1-2i$. Khi đó $a = ?$

A. $-9-2i$ **B.** $15+5i$ **C.** $9+2i$ **D.** $15-5i$

Hướng dẫn giải:

Theo Viet, ta có:

$$S = z_1 + z_2 = -\frac{a}{2+i} = 4 - i \Leftrightarrow a = \left(i-4\right)\left(i+2\right) \Leftrightarrow a = -9-2i$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 44. Cho số phức *z* thỏa mãn $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tính $\left|z + \frac{6}{z+i}\right|$

A. $\sqrt{17}$ và 5 **B.** $\sqrt{17}$ và 4 **C.** $\sqrt{17}$ và 3 **D.** $\sqrt{17}$ và 2

Hướng dẫn giải:

$$z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left(z-3\right)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \pm 2i$$

+) Nếu $z = 3+2i$:

$$z + \frac{6}{z+i} = 3 + 2i + \frac{6}{3+3i} = \frac{9+15i}{3+3i} = \frac{-18+72i}{18} = -1+4i$$

$$\Rightarrow \left|z + \frac{6}{z+i}\right| = \left|-1+4i\right| = \sqrt{17}$$

+) Nếu $z = 3-2i$:

$$z+\frac{6}{z+i}=3-2i+\frac{6}{3-i}=\frac{13-9i}{3-i}=\frac{30-40i}{10}=3-4i$$
$$\Rightarrow\left|z+\frac{6}{z+i}\right|=|3-4i|=5$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 45. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$. Khi đó $w=z_1^2+z_2^2-3z_1z_2$ là số phức có môđun là:

A. $\sqrt{20}$ **B.** $\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{13}$ **D.** 2

Hướng dẫn giải:

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=-1+3i \\ P=z_1.z_2=\dfrac{c}{a}=-2(1+i) \end{cases}$

$$w=z_1^2+z_2^2-3z_1z_2=S^2-5P=(-1+3i)^2+10(1+i)=2+4i$$
$$\Rightarrow |w|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 46. Số nghiệm của phương trình với ẩn số phức z: $4z^2+8|z|^2-3=0$ là:

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Gọi $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ là nghiệm của phương trình. Ta có:

$$4(a+bi)^2+8(a^2+b^2)-3=0\Leftrightarrow 4(a^2-b^2+2abi)+8(a^2+b^2)-3=0$$
$$\Leftrightarrow 12a^2+4b^2+8abi-3=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}12a^2+4b^2=3\\ ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a^2+b^2=1\\ ab=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}4a^2+4ab+b^2=1\\ ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2a+b)^2=1\\ \left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ b=\pm1\end{cases}\\ \begin{cases}a=\pm\dfrac{1}{4}\\ b=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phức

Ta chọn đáp án A.

Câu 47. Tìm số phức *z* để $z-\overline{z}=z^2$.

A. $z=0; z=1+i; z=1-i$ **B.** $z=0; z=1+i$

C. $z=0; z=1-i$ **D.** $z=1+i; z=1-i$

Hướng dẫn giải:

Gọi $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ là số phức thỏa mãn đẳng thức trên. Ta có:

$$z-\overline{z}=z^2 \Leftrightarrow a+bi-a+bi=\left(a+bi\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-b^2=0\\2ab=2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-b^2=0\\ \left[\begin{array}{l}a=1\\b=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=\pm1\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}z=0\\z=1+i\\z=1-i\end{array}\right.$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 48. Với mọi số ảo *z*, số $z^2+|z|^2$ là:

A. Số 0 **B.** Số thực âm **C.** Số thực dương **D.** Số ảo khác 0

Hướng dẫn giải:

Do z là số ảo nên z có dạng: $z=bi\left(b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $z^2+|z|^2=\left(bi\right)^2+b^2=-b^2+b^2=0$.

Ta chọn đáp án A.

Câu 49. Trong trường số phức phương trình $z^3+1=0$ có mấy nghiệm?

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

$$z^3+1=0 \Leftrightarrow \left(z+1\right)\left(z^2-z+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1\\z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm trong trường số phức.

Ta chọn đáp án A.

Câu 50. Giá trị của các số thực b, c để phương trình $z^2+bz+c=0$ nhận số phức $z=1+i$ làm một nghiệm là:

A. $\begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} b=-2 \\ c=-2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} b=2 \\ c=-2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Do $z=1+i$ là một nghiệm của $z^2+bz+c=0$ nên ta có:

$$(1+i)^2+b(1+i)+c=0 \Leftrightarrow b+c+bi+2i=0 \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 51. Trên tập hợp số phức, phương trình $z^2+7z+15=0$ có hai nghiệm z_1, z_2. Giá trị biểu thức $z_1+z_2+z_1z_2$ là:

A. 8 **B.** -7 **C.** 15 **D.** 22

Hướng dẫn giải:

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=-7 \\ P=z_1z_2=\dfrac{c}{a}=15 \end{cases} \Rightarrow z_1+z_2+z_1z_2=S+P=-7+15=8$

Ta chọn đáp án A.

Câu 52. Cho $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+(2-i)x+3+5i=0$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào là sai:

A. $x_1^4+x_2^4=-170-54i$ **B.** $x_1^2+x_2^2=-3-14i$

C. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=-\dfrac{79+27i}{14}$ **D.** $x_1^3+x_2^3=-(53+46i)$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lý Viet, ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=i-2 \\ P=x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=3+5i \end{cases}$

$x_1^4+x_2^4=(S^2-2P)^2-2P^2=\left[(i-2)^2-2(3+5i)\right]^2-2(3+5i)^2=-155+144i$ nên A sai

$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=(i-2)^2-2(3+5i)=-3-14i$ nên B đúng

$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{P}=\dfrac{-3-14i}{3+5i}=-\dfrac{79+27i}{14}$ nên C đúng

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=S(x_1^2+x_2^2-P)=(i-2)(-3-14i-3-5i)=(i-2)(-6-19i)$

$=-(53+46i)$ nên D đúng

Ta chọn đáp án A.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI HỆ SỐ THỰC TRÊN TẬP SỐ PHỨC

III. VẬN DỤNG CAO *(tối thiểu 10 câu):*

Câu 53. Tìm số nguyên x, y sao cho số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$

A. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

$z^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow (x + yi)^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = 18 + 26i$

$\Leftrightarrow (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = 18 + 26i$

$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3y^2) = 18 \\ y(3x^2 - y^2) = 26 \end{cases}$

Do *x, y* nguyên nên

$$x(x^2 - 3y^2) = 18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ x^2 - 3y^2 = 3 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = \pm\sqrt{11} \end{cases} (\text{loai}) \end{array} \right.$$

Mà $y(3x^2 - y^2) = 26 \Rightarrow x = 3; y = 1$

Ta chọn đáp án A.

Câu 54. Trên tập số phức, cho phương trình sau: $(z + i)^4 + 4z^2 = 0$. Có bao nhiêu nhận xét đúng trong số các nhận xét sau?

1. Phương trình vô nghiệm trên trường số thực $\mathbb{R}$.
2. Phương trình vô nghiệm trên trường số phức $\mathbb{C}$.
3. Phương trình không có nghiệm thuộc tập số thực.
4. Phương trình có bốn nghiệm thuộc tập số phức.
5. Phương trình chỉ có hai nghiệm là số phức.
6. Phương trình có hai nghiệm là số thực

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

$(z + i)^4 + 4z^2 = 0 \Leftrightarrow (z + i)^4 = -4z^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (z + i)^2 = 2iz \\ (z + i)^2 = -2iz \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 - 1 = 0 \\ z^2 + 4iz - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 1 \\ (z + 2i)^2 + 3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 1 \\ z = (-2 \pm \sqrt{3})i \end{array} \right.$$

Do đó phương trình có 2 nghiệm thực và 4 nghiệm phức. Vậy nhận xét 4, 6 đúng.

Ta chọn đáp án A.

Câu 55. Phương trình $z^6-9z^3+8=0$ có bao nhiêu nghiệm trên tập số phức?

A. 6 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$z^6-9z^3+8=0 \Leftrightarrow (z-1)(z-2)\left(z^2+z+1\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=2 \\ z=\pm\sqrt[3]{-1} \\ -1\pm i\sqrt{3} \end{cases}$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 56. Giả sử z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$ và *A, B* là các điểm biểu diễn của z_1,z_2. Tọa độ trung điểm *I* của đoạn thẳng *AB* là:

A. $I(1;0)$ **B.** $I(-1;0)$ **C.** $I(0;1)$ **D.** $I(1;1)$

Hướng dẫn giải:

$$z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow (z-1)^2+4=0 \Leftrightarrow z=1\pm 2i$$

$$\Rightarrow A(1;2);B(1;-2)$$

Do đó tọa độ trung điểm *I* của đoạn thẳng *AB* là $I(1;0)$.

Ta chọn đáp án A.

Câu 57. Cho phương trình $z^2+mz-6i=0$. Để phương trình có tổng bình phương hai nghiệm bằng 5 thì *m* có dạng $m=\pm(a+bi)(a,b\in\mathbb{R})$. Giá trị $a+2b$ là:

A. -1 **B.** 1 **C.** -2 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=-m \\ P=z_1.z_2=\dfrac{c}{a}=-6i \end{cases}$

Theo bài cho, tổng bình phương hai nghiệm bằng 5. Ta có:

$$z_1^2+z_2^2=S^2-2P=m^2+12i=5 \Leftrightarrow m^2=5-12i \Leftrightarrow m^2=(3-2i)^2$$

$$\Rightarrow m=\pm(3-2i)$$

$$\Rightarrow a=3;b=-2 \Rightarrow a+2b=3-4=-1$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 58. Gọi z_1, z_2, z_2, z_4 là các nghiệm phức của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Giá trị của $P = \left(z_1^2+1\right)\left(z_2^2+1\right)\left(z_3^2+1\right)\left(z_4^2+1\right)$ là:

A. $\frac{17}{9}$ **B.** $\frac{17}{8}$ **C.** $\frac{9}{17}$ **D.** $\frac{17i}{9}$

Hướng dẫn giải:

Với mọi $z \neq \frac{i}{2}$, ta có:

$$\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{z-1}{2z-i} = \pm 1 \\ \frac{z-1}{2z-i} = \pm i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1+i \\ z = \frac{1+i}{3} \\ z = \frac{2+4i}{5} \\ z = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow P = \left(z_1^2+1\right)\left(z_2^2+1\right)\left(z_3^2+1\right)\left(z_4^2+1\right) = \left[(-1+i)^2+1\right]\left[\frac{(1+i)^2}{9}+1\right]\left[\frac{(2+4i)^2}{25}+1\right]$$

$$= (1-2i)\frac{9+2i}{9}.\frac{13+16i}{25} = \frac{425}{9.25} = \frac{17}{9}$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 59. Trong tập số phức, giá trị của *m* để phương trình bậc hai $z^2 + mz + i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng $-4i$ là:

A. $\pm(1-i)$ **B.** $(1-i)$ **C.** $\pm(1+i)$ **D.** $-1-i$

Hướng dẫn giải:

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình.

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -m \\ P = z_1.z_2 = \frac{c}{a} = i \end{cases} \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = S^2 - 2P = m^2 - 2i$

Ta có: $m^2 - 2i = -4i \Leftrightarrow m^2 = -2i \Leftrightarrow m^2 = (1-i)^2 \Leftrightarrow m = \pm(1-i)$

Ta chọn đáp án A.

Câu 60. Cho phương trình $z^2 - mz + 2m - 1 = 0$ trong đó *m* là tham số phức. Giá trị của *m* để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -10$ là:

A. $m = 2 \pm 2\sqrt{2}i$ **B.** $m = 2 + 2\sqrt{2}i$ **C.** $m = 2 - 2\sqrt{2}i$ **D.** $m = -2 - 2\sqrt{2}i$

Hướng dẫn giải:

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = m \\ P = z_1.z_2 = \dfrac{c}{a} = 2m - 1 \end{cases}$

$z_1^2 + z_2^2 = -10 \Leftrightarrow S^2 - 2P = -10 \Leftrightarrow m^2 - 2(2m-1) = -10 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}i$

Ta chọn đáp án A.

Câu 61. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 8 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Giá trị của số phức $w = (2z_1 + z_2)\overline{z_1}$ là:

A. 8 **B.** 10 **C.** $12 + 6i$ **D.** $12 - 6i$

Hướng dẫn giải:

$z^2 + 2z + 8 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \pm \sqrt{7}i \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 + \sqrt{7}i \\ z_2 = 1 - \sqrt{7}i \end{cases}$

$w = (2z_1 + z_2)\overline{z_1} = \left[2\left(-1+\sqrt{7}i\right) + 1 - \sqrt{7}i\right]\left(-1-\sqrt{7}i\right) = \left(-1+\sqrt{7}i\right)\left(-1-\sqrt{7}i\right) = 1 + 7 = 8$

Câu 62. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $z^4 - 1 = 0$ trên tập số phức là bao nhiêu?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải:

$z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 1 \\ z = \pm i \end{array}\right.$

Do đó tổng bình phương các nghiệm của phương trình là $1 - 1 = 0$

Ta chọn đáp án A.

Câu 63. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 6 = 0$. Trong đó z_1 có phần ảo âm. Giá trị biểu thức $M = |z_1| + |3z_1 - z_2|$ là:

A. $\sqrt{6} + 2\sqrt{21}$ **B.** $\sqrt{6} - 2\sqrt{21}$ **C.** $\sqrt{6} + 4\sqrt{21}$ **D.** $\sqrt{6} - 4\sqrt{21}$

Hướng dẫn giải:

$z^2 - 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{5}i$

$\Rightarrow z_1 = 1 - \sqrt{5}i; z_2 = 1 + \sqrt{5}i$

$\Rightarrow M = |z_1| + |3z_1 - z_2| = \left|1 - \sqrt{5}i\right| + \left|2 - 4\sqrt{5}i\right| = \sqrt{6} + \sqrt{84} = \sqrt{6} + 2\sqrt{21}$

Ta chọn đáp án A.

Câu 64. Phương trình $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0$ trên tập số phức có các nghiệm là:

A. $2 \pm i\sqrt{2}$ hoặc $-2 \pm 2i\sqrt{2}$ **B.** $2 \pm i\sqrt{2}$ hoặc $1 \pm 2i\sqrt{2}$

C. $1 \pm 2i\sqrt{2}$ hoặc $-2 \pm 2i\sqrt{2}$ **D.** $-1 \pm 2i\sqrt{2}$ hoặc $-2 \pm 2i\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

$x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 6\right)\left(x^2 + 4x + 12\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 6 = 0 \\ x^2 + 4x + 12 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^2 + 2 = 0 \\ (x+2)^2 + 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \pm \sqrt{2}i \\ x = -2 \pm 2\sqrt{2}i \end{array}\right.$$

Ta chọn đáp án A.

Câu 65. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + 7 = 0$. Khi đó $A = z_1^4 + z_2^4$ có giá trị là:

A. 23 **B.** $\sqrt{23}$ **C.** 13 **D.** $\sqrt{13}$

Hướng dẫn giải:

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = -\sqrt{3} \\ P = z_1.z_2 = \dfrac{c}{a} = 7 \end{cases}$

$A = z_1^4 + z_2^4 = \left(S^2 - 2P\right)^2 - 2P^2 = (3 - 2.7)^2 - 2.49 = 23$

Ta chọn đáp án A.