

[CHỦ ĐỀ 4.1. NGUYÊN HÀM]

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Định lí:

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\left(\int f(x) dx\right)' = f(x) \text{ và } \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

Tính chất 2

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \text{ với } k \text{ là hằng số khác } 0.$$

Tính chất 3

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lí: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)
------------------------------	---

$\int 0 dx = C$	$\int 0 du = C$
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x) dx = F(u(x)) + C$$

Hệ quả: Nếu $u = ax + b (a \neq 0)$ thì ta có

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

Hay

$$\int u dv = uv - \int v du$$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số.
- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần.

[CHỦ ĐỀ 4.1. NGUYÊN HÀM]

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

4.1.1. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC, PHÂN THỨC.

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

D. $F(x) = 3x^2 + 3x + C.$

Hướng dẫn giải

Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 2. Hàm số $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 120 + C$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 15x^2 + 8x - 7.$

B. $f(x) = 5x^2 + 4x + 7.$

C. $f(x) = \frac{5x^2}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2}.$

D. $f(x) = 5x^2 + 4x - 7.$

Hướng dẫn giải

Lấy đạo hàm của hàm số $F(x)$ ta được kết quả.

Câu 3. Nguyên hàm của hàm số: $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là:

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C.$

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

C. $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C.$

D. $2x - 3 - \frac{1}{x^2} + C.$

Hướng dẫn giải Sử dụng bảng nguyên hàm

Câu 4. Tìm nguyên hàm: $\int (x+1)(x+2)dx$

A. $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

B. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

C. $2x+3+C$.

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

Hướng dẫn giải $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 5. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{5-2x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ là hàm số nào

A. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$.

B.

$F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C$.

C. $F(x) = \ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$.

D.

$F(x) = -\ln|5-2x| - 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng bảng nguyên hàm.

4.1.2. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$.

A. $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

B. $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C$

C. $\int \sin 2x dx = \cos 2x + C$

D. $\int \sin 2x dx = -\cos 2x + C$

Hướng dẫn giải $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

B. $\int f(x) dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Hướng dẫn giải $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \int \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) d\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$.

A. $\int f(x)dx = 2 \tan \frac{x}{2} + C$.

B. $\int f(x)dx = \tan \frac{x}{2} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C$.

D. $\int f(x)dx = -2 \tan \frac{x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \tan \frac{x}{2} + C$

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$.

A. $\int f(x)dx = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3} \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.

C. $\int f(x)dx = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3} \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{dx}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$$

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^4 x}{4} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

D. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải $\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^3 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

4.1.3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ, LÔGARIT.

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$.

A. $e^x + e^{-x} + C$.

B. $-e^x + e^{-x} + C$.

C. $e^x - e^{-x} + C$.

D. $-e^x - e^{-x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int (e^x - e^{-x}) dx = e^x + e^{-x} + C.$$

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x \cdot 3^{-2x}$.

A. $\left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$.

B. $\left(\frac{9}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$.

C. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$.

D. $\left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 + \ln 9} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int 2^x \cdot 3^{-2x} dx = \int \left(\frac{2}{9}\right)^x dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$$

Câu 13. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là:

A. $F(x) = 3e^x + x + C$.

B. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C$.

C. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C$.

D. $F(x) = 3e^x - x + C$.

Hướng dẫn giải

$$F(x) = \int e^x(3 + e^{-x}) dx = \int (3e^x + 1) dx = 3e^x + x + C$$

Câu 14. Hàm số $g(x) = 7e^x - \tan x$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$.

B. $k(x) = 7e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $h(x) = 7e^x + \tan^2 x - 1$.

D. $l(x) = 7 \left(e^x - \frac{1}{\cos^2 x} \right)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } g'(x) = 7e^x - \frac{1}{\cos^2 x} = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) = f(x)$$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{4x-2}}$.

A. $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$

B. $e^{2x-1} + C.$

C. $\frac{1}{2}e^{4x-2} + C.$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{e^{2x-1}} + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int \sqrt{e^{4x-2}} dx = \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$$

4.1.4. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC.

Câu 16. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ là:

A. $\sqrt{2x-1} + C.$

B. $2\sqrt{2x-1} + C.$

C. $\frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$

D.

$-2\sqrt{2x-1} + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + C.$$

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$.

A. $-2\sqrt{3-x} + C.$

B. $-\sqrt{3-x} + C.$

C. $2\sqrt{3-x} + C.$

D.

$-3\sqrt{3-x} + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx = -\int \frac{d(3-x)}{\sqrt{3-x}} = -2\sqrt{3-x} + C.$$

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

A. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

C. $-\frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot d(2x+1) = \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C.$$

Câu 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{5-3x}$.

- A. $-\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} + C$. B. $-\frac{2}{3}(5-3x)\sqrt{5-3x}$.
- C. $\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x}$. D. $-\frac{2}{3}\sqrt{5-3x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \sqrt{5-3x} dx = -\frac{1}{3} \int (5-3x)^{\frac{1}{2}} \cdot d(5-3x) = -\frac{2}{9} (5-3x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} (5-3x) \sqrt{5-3x} + C$$

Câu 20. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

- A. $\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C$. B. $-\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C$.
- C. $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}$. D. $\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \sqrt[3]{x-2} dx = \int (x-2)^{\frac{1}{3}} \cdot d(x-2) = \frac{3}{4} (x-2)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} (x-2) \sqrt[3]{x-2} + C$$

Câu 21. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$.

- A. $-\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C$. B. $-\frac{3}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C$.
- C. $\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C$. D. $-(1-3x)^{-\frac{2}{3}} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \sqrt[3]{1-3x} dx = -\frac{1}{3} \int (1-3x)^{\frac{1}{3}} \cdot d(1-3x) = -\frac{1}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4} (1-3x) \sqrt[3]{1-3x} + C$$

Câu 22. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{3x}}$.

- A. $\frac{2\sqrt{e^{3x}}}{3} + C$ B. $\frac{3}{2\sqrt{e^{3x}}} + C$ C. $\frac{3\sqrt{e^{3x}}}{2} + C$ D.
- $\frac{2e^{\frac{3x+2}{2}}}{3x+2} + C$

$$F'(x) = (6\sqrt{1-x})' = \frac{-3}{\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow a = -3$$

4.1.5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 26. Tính $F(x) = \int x \sin x dx$ bằng:

A. $F(x) = \sin x - x \cos x + C$.

B. $F(x) = x \sin x - \cos x + C$.

C. $F(x) = \sin x + x \cos x + C$.

D. $F(x) = x \sin x + \cos x + C$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Dùng định nghĩa, sử dụng máy tính nhập $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$, CALC ngẫu nhiên tại một số điểm x_0 thuộc tập xác định, kết quả bằng 0 chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng

u và đạo hàm của u	$+$	dv và nguyên hàm của v
x	\swarrow	$\sin x$
1	\swarrow	$-\cos x$
0		$-\sin x$

Vậy $F(x) = \sin x - x \cos x + C$. Chọn A.

Câu 27. Tính $\int x \ln^2 x dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $\frac{1}{4} x^2 (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C$.

B. $\frac{1}{2} x^2 (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C$.

C. $\frac{1}{4} x^2 (2 \ln^2 x + 2 \ln x + 1) + C$.

D. $\frac{1}{2} x^2 (2 \ln^2 x + 2 \ln x + 1) + C$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần.

Phương pháp trắc nghiệm

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng:

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
$\ln^2 x$	x
$\frac{2 \ln x}{x}$	$\frac{x^2}{2}$
$\ln x$ (chuyển $\frac{2}{x}$ qua dv)	x (nhận $\frac{2}{x}$ từ u)
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^2}{2}$
1 (chuyển $\frac{1}{x}$ qua dv)	$\frac{x}{2}$ (nhận $\frac{1}{x}$ từ u)
0	$\frac{x^2}{4}$

$$\text{Do đó } \int x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C.$$

Chọn A.

Câu 28. Tính $F(x) = \int x \sin x \cos x dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $F(x) = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{x}{2} \sin 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} \cos 2x + C.$

D. $F(x) = \frac{-1}{4} \sin 2x - \frac{x}{8} \cos 2x + C.$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Biến đổi $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ rồi sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng. **Kết quả:** Chọn A.

Câu 29. Tính $F(x) = \int x e^{\frac{x}{3}} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = 3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$

B. $F(x) = (x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$

C. $F(x) = \frac{x-3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C$

D. $F(x) = \frac{x+3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với

$$u = x, dv = e^{\frac{x}{3}} dx.$$

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng. **Kết quả:** Chọn A.

Câu 30. Tính $F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

B. $F(x) = -x \cot x + \ln |\cos x| + C$.

C. $F(x) = -x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

D. $F(x) = -x \cot x - \ln |\cos x| + C$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với

$$u = x, dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng. **Kết quả:** Chọn A.

Câu 31. Tính $F(x) = \int x^2 \cos x dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$. B.

$F(x) = 2x^2 \sin x - x \cos x + \sin x + C$.

C. $F(x) = x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + C$. D.

$F(x) = (2x + x^2) \cos x - x \sin x + C$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần với $u = x^2; dv = \cos x dx$, sau đó $u_1 = x; dv_1 = \sin x dx$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng. **Kết quả:** Chọn A

Câu 32. Tính $F(x) = \int x \sin 2x dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$. B.

$F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C$.

C. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$. D.

$F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C$.

Hướng dẫn giải: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = x; dv = \sin 2x dx$

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng hoặc sử dụng máy tính: Nhập $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$, CALC ngẫu nhiên tại một số điểm x_0 bất kỳ, nếu kết quả bằng 0 thì chọn đáp án đó. **Kết quả:** Chọn A

Câu 33. Hàm số $F(x) = x \sin x + \cos x + 2017$ là một nguyên hàm của hàm số nào?

- A. $f(x) = x \cos x$. B. $f(x) = x \sin x$. C. $f(x) = -x \cos x$. D. $f(x) = -x \sin x$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Tính $F'(x)$ có kết quả trùng với đáp án chọn.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 chọn. **Kết quả:** Chọn A.

Câu 34. Tính $\int \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$. Chọn đáp án sai

- A. $\frac{-1 + \ln(x+1)}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$ B. $-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$
C. $-\frac{x+1}{x}(1 + \ln(x+1)) + \ln |x| + C$ D. B, C đều đúng

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = 1 + \ln(x+1)$; $dv = -\frac{1}{x^2} dx$ hoặc biến đổi rồi đặt $u = \ln(x+1)$; $dv = -\frac{1}{x^2} dx$.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng máy tính kiểm tra bằng định nghĩa.

Kết quả: Chọn A (vì B, C đều đúng).

4.1.6. ÔN TẬP

Câu 35. Hãy chọn mệnh đề đúng

A. $\int f(x) dx = F(x) + C$, ($F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$).

B. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

C. $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx.\int g(x)dx.$

D. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$

Hướng dẫn giải

Theo định nghĩa, A đúng. B sai vì thiếu điều kiện $\alpha \neq -1$; C, D sai vì không có tính chất.

Câu 36. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int \sin x dx = \cos x + C.$

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0.$

D. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1).$

C. $\int e^x dx = e^x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A vì $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Câu 37. Hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 3 + \frac{1}{x}$ có nguyên hàm là:

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C.$

B. $F(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C.$

C. $F(x) = 3x^2 - 2x - \frac{1}{x^2} + C.$

D. $F(x) = x^4 - x^3 + 3x + \ln|x| + C.$

Hướng dẫn giải

$$F(x) = \int (x^3 - x^2 + 3 + \frac{1}{x}) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + \ln|x| + C$$

Câu 38. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là:

A. $\tan x - x + C.$

B. $-\tan x + x + C.$

C. $\tan x + x + C.$

D.

$-\tan x - x + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$$

Câu 39. Hàm số $F(x) = 7 \sin x - \cos x + 1$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây ?

- A. $\sin x + 7 \cos x$. B. $-\sin x + 7 \cos x$. C. $\sin x - 7 \cos x$. D.
 $-\sin x - 7 \cos x$.

Hướng dẫn giải

$$F'(x) = 7 \cos x + \sin x$$

Câu 40. Kết quả của $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ là:

- A. $\tan x - \cot x + C$. B. $\cot 2x + C$. C. $\tan 2x - x + C$. D.
 $-\tan x + \cot x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C$$

Câu 41. Hàm số $F(x) = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1$ có một nguyên hàm là:

- A. $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x$. B. $f(x) = x^3 - \sqrt{x} - \frac{1}{x} - x$.
C. $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$. D. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x} - x$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int F(x) dx = \int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1 \right) dx = x^3 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - x$$

Câu 42. Hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^5 x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ bằng:

- A. $-\frac{1}{4 \sin^4 x}$. B. $\frac{1}{4 \sin^4 x}$. C. $\frac{4}{\sin^4 x}$. D. $\frac{-4}{\sin^4 x}$.

Hướng dẫn giải

$$\int f(x) dx = \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{1}{\sin^5 x} d(\sin x) = -\frac{1}{4 \sin^4 x}$$

Câu 43. Kết quả của $\int 2x\sqrt{5-4x^2} dx$ bằng:

- A. $-\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$. B. $-\frac{3}{8}\sqrt{(5-4x^2)} + C$.
C. $\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$. D. $-\frac{1}{12}\sqrt{(5-4x^2)^3} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{5-4x^2} \Rightarrow tdt = -4xdx$$

$$\text{Ta có } \int 2x\sqrt{5-4x^2} dx = -\frac{1}{2} \int t^2 dt = -\frac{1}{6} t^3 + C = -\frac{1}{6} \sqrt{(5-4x^2)^3} + C$$

Câu 44. Kết quả $\int e^{\sin x} \cos x dx$ bằng:

- A. $e^{\sin x} + C$. B. $\cos x \cdot e^{\sin x} + C$. C. $e^{\cos x} + C$. D.
 $e^{-\sin x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

Câu 45. Tính $\int \tan x dx$ bằng:

- A. $-\ln|\cos x| + C$. B. $\ln|\cos x| + C$. C. $\frac{1}{\cos^2 x} + C$. D.
 $\frac{-1}{\cos^2 x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \tan x dx = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln|\cos x| + C$$

Câu 46. Tính $\int \cot x dx$ bằng:

- A. $\ln|\sin x| + C$. B. $-\ln|\sin x| + C$. C. $\frac{-1}{\sin^2 x} + C$. D.
 $\frac{1}{\sin^2 x} - C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \cot x dx = \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = \ln|\sin x| + C$$

[CHỦ ĐỀ 4.1 NGUYÊN HÀM]

VẬN DỤNG THẤP

4.1.1. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC, PHÂN THỨC.

Câu 47. Nguyên hàm của hàm số: $y = \frac{x^3}{x-1}$.

A. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C$.

B. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x+1| + C$.

C. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C$.

D. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x + \ln|x-1| + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$

Sử dụng bảng nguyên hàm suy ra đáp án.

Câu 48. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1}$ là:

A. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln|x+1|$.

B. $\frac{x^2}{2} + 3x + 6\ln|x+1|$.

C. $\frac{x^2}{2} + 3x - 6\ln|x+1|$.

D. $\frac{x^2}{2} - 3x + 6\ln(x+1)$.

Hướng dẫn giải

$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1} = x - 3 + \frac{6}{x+1}$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 49. Tìm nguyên hàm: $\int \frac{1}{x(x+3)} dx$

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.

B. $-\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.

C. $\frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C$.

D. $\frac{2}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.

Hướng dẫn giải

$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right)$. Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 50. Tìm nguyên hàm: $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C$.

B. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C$.

C. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$

D. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + C.$

Hướng dẫn giải

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right). \text{ Sử dụng bảng nguyên hàm.}$$

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ là:

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$

B. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + C.$

C. $\ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$

D. $\ln |x^2 + x - 2| + C.$

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right). \text{ Sử dụng bảng nguyên hàm.}$$

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1-x}{x} \right)^2$ là:

A. $-\frac{1}{x} - 2 \ln |x| + x + C.$

B. $-\frac{1}{x} - 2 \ln x + x + C.$

C. $\frac{1}{x} - 2 \ln |x| + x + C.$

D. $-\frac{1}{x} - 2 \ln |x| - x + C.$

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 = \frac{1-2x+x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1. \text{ Sử dụng bảng nguyên hàm.}$$

Câu 53. Nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ là:

A. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

B. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$

C. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

D. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$

Hướng dẫn giải

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right). \text{ Sử dụng bảng nguyên hàm.}$$

Câu 54. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$.

Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là

- A. $x = 1 - \sqrt{3}$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{8-x^2} \Rightarrow t^2 = 8-x^2 \Rightarrow -tdt = xdx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\int \frac{tdt}{t} = -t + C = -\sqrt{8-x^2} + C.$$

Vì $F(2) = 0$ nên $C = 2$. Ta có phương trình $-\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}$

Câu 55. Nếu $F(x)$ là một họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$ thì $F(3)$ bằng:

- A. $\ln 2 + 1$. B. $\ln \frac{3}{2}$. C. $\ln 2$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$, vì $F(2) = 1$ nên $C = 1$. $F(x) = \ln|x-1| + 1$, thay $x = 3$ ta có đáp án.

Câu 56. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ thỏa mãn

$F(1) = \frac{1}{3}$. Giá trị của $F^2(e)$ là:

- A. $\frac{8}{9}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Rightarrow tdt = \frac{\ln x}{x} dx$

$$\int \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3} + C. \text{ Vì } F(1) = \frac{1}{3} \text{ nên } C = 0$$

Vậy $F^2(e) = \frac{8}{9}$.

Câu 57. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là:

A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$.

C. $-\cot x + x^2$.

D. $\cot x - x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

Hướng dẫn giải

$$\int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x^2 - \cot x + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ nên } C = -\frac{\pi^2}{16}.$$

4.1.2. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 58. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$.

A. $\int f(x) dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{\cos^3 x}{3} + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Câu 59. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - 1}$.

A. $\int f(x) dx = -\ln|\sin x| + C$.

B. $\int f(x) dx = \ln|\cos 2x - 1| + C$.

C. $\int f(x) dx = \ln|\sin 2x| + C$.

D. $\int f(x) dx = \ln|\sin x| + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\cos 2x - 1} = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin^2 x + 1} dx = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\ln|\sin x| + C$$

Câu 60. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{-2 \cos^3 x}{3} + \cos x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \sin x + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \sin x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \sin x \cdot \cos 2x dx = \int (2\cos^2 x - 1) \sin x dx = -\int (2\cos^2 x - 1) d(\cos x) = \frac{-2\cos^3 x}{3} + \cos x + C$$

Câu 61. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x \cdot \cos 3x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x + C$.

C. $\int f(x) dx = 2 \cos^4 x + 3 \cos^2 x + C$. D. $\int f(x) dx = 3 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int 2 \sin x \cdot \cos 3x dx = \int (\sin 4x - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x + C$$

Câu 62. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \sin 3x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) + \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{3}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \left(x + \frac{\sin 6x}{6} \right) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \sin 3x dx &= \int \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x dx \\ &= \frac{3}{8} \int 2 \sin x \cdot \sin 3x dx - \frac{1}{8} \int 2 \sin^2 3x dx = \frac{3}{8} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx - \frac{1}{8} \int (1 - \cos 6x) dx \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C \end{aligned}$$

Câu 63. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{-3}{16} \cos 4x + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{3}{16} \cos 4x + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{-3}{16} \sin 4x + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{3}{16} \sin 4x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} & \int (\sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x) dx \\ &= \int \left(\frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \cdot \sin 3x \right) dx \\ &= \int \left(\frac{3}{4} \sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos 3x + \frac{3}{4} \sin 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \cos 3x \right) dx \\ &= \frac{3}{4} \int (\sin x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos x) dx = \frac{3}{4} \int \sin 4x dx \\ &= \frac{-3}{16} \cos 4x + C \end{aligned}$$

Câu 64. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

- A. $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}$. B. $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{3}{2}$. C. $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{2}$. D. $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

- $F(x) = \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x + C$
- $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

4.1.3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ, LÔGARIT.

Câu 65. Hàm số $f(x) = e^x \left(\ln 2 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right)$ có họ các nguyên hàm là hàm số nào sau đây?

- A. $e^x \ln 2 - \cot x + C$. B. $e^x \ln 2 + \cot x + C$.
C. $e^x \ln 2 + \frac{1}{\cos^2 x} + C$. D. $e^x \ln 2 - \frac{1}{\cos^2 x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int f(x) dx = \int \left(e^x \ln 2 + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = e^x \ln 2 - \cot x + C$$

Câu 66. Hàm số $f(x) = 3^x - 2^x \cdot 3^x$ có nguyên hàm bằng

- A. $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{6^x}{\ln 6} + C$. B. $3^x \ln 3(1 + 2^x \ln 2) + C$.

C. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3^x \cdot 2^x}{\ln 6} + C$. D. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 3 \cdot \ln 2} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int f(x)dx = \int (3^x + 6^x)dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{6^x}{\ln 6} + C$$

Câu 67. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (e^{-x} + e^x)^2$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 1$ là:

A. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x + 1$. B. $F(x) = -2e^{-2x} + 2e^{2x} + 2x + 1$.
C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x$. D. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + 2x + C$, $F(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$

Câu 68. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

A. $2x - 3\ln|x+1| + C$. B. $2x + 3\ln|x+1| + C$.
C. $2x - \ln|x+1| + C$. D. $2x + \ln|x+1| + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{2x-1}{x+1} dx = \int \left(2 - \frac{3}{x+1} \right) dx = 2x - 3\ln|x+1| + C$$

Câu 69. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 3}{2x+1}$.

A. $\frac{1}{8}(2x+1)^2 + \frac{5}{4}\ln|2x+1| + C$. B. $\frac{1}{8}(2x+1)^2 + 5\ln|2x+1| + C$.
C. $(2x+1)^2 + \ln|2x+1| + C$. D. $(2x+1)^2 - \ln|2x+1| + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 3}{2x + 1} dx = \int \left(\frac{2x + 1}{2} + \frac{5}{2(2x + 1)} \right) dx = \frac{1}{8}(2x + 1)^2 + \frac{5}{4} \ln|2x + 1| + C$$

Câu 70. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$.

A. $\frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + C$. B. $\frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1) + C$.

C. $x^2 - \ln(x^2 + 1) + C$. D. $x^2 + \ln(x^2 + 1) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} dx = \int \left(x - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1) + C$$

Câu 71. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x + x}$.

A. $\ln(\ln x + 1) + C$. B. $\ln(\ln x - 1) + C$.

C. $\ln(x + 1) + C$. D. $\ln x + 1 + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx = \int \frac{d(\ln x + 1)}{(\ln x + 1)} = \ln(\ln x + 1) + C$$

Câu 72. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$.

A. $e^x - \ln(e^x + 1) + C$. B. $e^x + \ln(e^x + 1) + C$.

C. $\ln(e^x + 1) + C$. D. $e^{2x} - e^x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \left(e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = e^x - \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = e^x - \ln(e^x + 1) + C$$

4.1.4. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC.

Câu 73. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$.

A. $2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C$. B. $2\sqrt{x} + 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C$.

C. $\ln(1+\sqrt{x})+C$.

D. $2+2\ln(1+\sqrt{x})+C$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1+\sqrt{x} \Rightarrow x=(t-1)^2 \Rightarrow dx=2(t-1)dt$. Khi đó tích phân trở thành:

$$\int \frac{2(t-1)dt}{t} = 2\int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = 2(t - \ln|t|) + C_1.$$

Thay $t=1+\sqrt{x}$ vào kết quả ta được:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x}+1 - \ln|1+\sqrt{x}|) + C_1 = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

(Với $C=2+C_1$ và $1+\sqrt{x}>0$)

Câu 74. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$.

A. $\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+1} + C$.

B. $(x+4)\sqrt{x+1} + C$.

C. $\frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} + C$.

D. $\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx = \int \left(\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) d(x+1) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+1} + C$$

Câu 75. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{1-x}}$.

A. $-\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{1-x} + C$.

B. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{1-x} + C$.

C. $-\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{1-x} + C$.

D. $-2\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x}} dx = -\int \left(-2\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) d(1-x) = \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{1-x} + C$$

Câu 76. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}}$.

A. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+2} + C.$

B. $-\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+2} + C.$

C. $\frac{1}{6}\sqrt{3x^2+2} + C.$

D. $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+2} + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{d(3x^2+2)}{\sqrt{3x^2+2}} = \frac{1}{3} \sqrt{3x^2+2} + C$$

Câu 77. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}$.

A. $-\frac{1}{3}(x^2+8)\sqrt{4-x^2} + C.$

B. $\frac{1}{3}(x^2+8)\sqrt{4-x^2} + C.$

C. $-\frac{1}{3}\sqrt{4-x^2} + C.$

D. $-\frac{2}{3}(x^2+8)\sqrt{4-x^2} + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2 = 4-t^2 \Rightarrow xdx = -tdt$. Khi đó tích phân trở thành:

$$\int \frac{(4-t^2)(-tdt)}{t} = \int (t^2-4) dt = \frac{t^3}{3} - 4t + C.$$

Thay $t = \sqrt{4-x^2}$ vào kết quả ta được:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{(\sqrt{4-x^2})^3}{3} - 4\sqrt{4-x^2} + C = -\frac{1}{3}(x^2+8)\sqrt{4-x^2} + C$$

4.1.5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 78. Tính $F(x) = \int (2x-1)e^{1-x} dx = e^{1-x}(Ax+B) + C$. Giá trị của biểu thức $A+B$ bằng:

A. $-3.$
5.

B. $3.$

C. $0.$

D.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng.

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
$2x$	$(3x-2)^6$
2	$\frac{1}{21}(3x-2)^7$
0	$\frac{1}{504}(3x-2)^8$

Do đó $F(x) = \frac{2}{21}x(3x-2)^7 - \frac{1}{252}(3x-2)^8 + C$.

Vậy $12A+11B=1$. Chọn A.

Câu 81. Tính $F(x) = \int x^2\sqrt{x-1}dx = ax^2(x-1)\sqrt{x-1} + bx(x-1)^2\sqrt{x-1} + c(x-1)^3\sqrt{x-1} + C$.

Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

A. $\frac{2}{7}$

B. $\frac{-2}{7}$

C. $\frac{142}{105}$

D. $\frac{-142}{105}$

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận:

Đặt $u = x^2, dv = \sqrt{x-1}dx$ ta được $F(x) = \frac{2}{3}x^2(x-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}\int x(x-1)^{\frac{2}{3}}dx$

Lại đặt $u = x, dv = (x-1)^{\frac{2}{3}}dx$ ta được kết quả

$$F(x) = \int x^2\sqrt{x-1}dx = \frac{2}{3}x^2(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{8}{15}x(x-1)^2\sqrt{x-1} + \frac{16}{105}(x-1)^3\sqrt{x-1} + C$$

Vậy $a+b+c = \frac{-82}{105}$. Chọn A.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
x^2	$(x-1)^{\frac{1}{2}}$

$2x$	$\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$
2	$\frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}}$
0	$\frac{8}{105}(x-1)^{\frac{7}{2}}$

$$F(x) = \int x^2 \sqrt{x-1} dx = \frac{2}{3} x^2 (x-1) \sqrt{x-1} - \frac{8}{15} x (x-1)^2 \sqrt{x-1} + \frac{16}{105} (x-1)^3 \sqrt{x-1} + C$$

Vậy $a+b+c = \frac{2}{7}$. Chọn A.

Câu 82. Tính $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$. Chọn kết quả đúng:

A. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$. B. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

C. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \sqrt{1+x^2} + C$. D.

$F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x\sqrt{1+x^2} + C$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với

$u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}); dv = dx$

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	1
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x
(Chuyển $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ qua dv)	

1	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (Nhận $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ từ u)
0	$\sqrt{1+x^2}$

Kết quả: chọn A

Câu 83. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 e^{x^2}$ và đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua gốc tọa độ O . Chọn kết quả đúng:

A. $f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

B. $f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} + \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2}$.

C. $f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2}$.

D. $f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} + \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Đặt $u = x^2, dv = x e^{x^2}$ chọn $du = 2x dx, v = \frac{1}{2} e^{x^2}$ ta được

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C. \text{ Đồ thị đi qua } O(0;0) \text{ nên } C = \frac{1}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Phương pháp trắc nghiệm:

u và đạo hàm của u	dv và nguyên hàm của v
x^2	$x e^{x^2}$
2x (chuyển 2x qua dv)	$\frac{1}{2} e^{x^2}$
1	$x e^{x^2}$ (nhận 2x từ u)
0	$\frac{1}{2} e^{x^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C. \text{ Đồ thị đi qua } O(0;0) \text{ nên } C = \frac{1}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 84. Tính $F(x) = \int \sqrt{x^2 - 1} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$. B.

$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$.

C. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x-\sqrt{x^2-1}| + C$. D.

$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x-\sqrt{x^2-1}| + C$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Đặt $u = \sqrt{x^2-1}$, $dv = dx$ ta được $F(x) = x\sqrt{x^2-1} - F(x) - J(x)$

với $J(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, bằng cách đặt $u = x + \sqrt{x^2-1}$ ta được

$$J(x) = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$$

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$. Chọn A.

4.1.6. ÔN TẬP

Câu 85. Kết quả của $\int \sin^2 x \cos x dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$. B. $\sin^3 x + C$. C. $-\frac{1}{3}\sin^3 x + C$. D.

$-\sin^3 x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = -\frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Câu 86. Tính $\int \cos^2 x \sin x dx$ bằng:

A. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$. B. $-\cos^3 x + C$. C. $\frac{1}{3}\cos^3 x + C$. D.

$\cos^3 x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

Câu 87. Kết quả của $\int \sin^3 x dx$ bằng:

A. $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.

B. $-\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.

C. $3 \sin^2 x \cdot \cos x + C$.

D. $\frac{\cos^3 x}{6} - \cos x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

Câu 88. Kết quả của $\int \cos^3 x dx$ bằng:

A. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

B. $\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

C. $3 \sin^2 x \cdot \cos x + C$.

D. $-\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

Câu 89. Kết quả của $\int \sin^4 x \cos x dx$ bằng:

A. $\frac{1}{5} \sin^5 x + C$.

B. $-\frac{1}{5} \sin^5 x + C$.

C. $\sin^5 x + C$.

D.

$-\sin^5 x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

Câu 90. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$ bằng:

A. $2 \tan \sqrt{x} + C$.

B. $\tan \sqrt{x} + C$.

C. $\tan^2 \sqrt{x} + C$.

D.

$\frac{1}{2} \tan \sqrt{x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2 \tan \sqrt{x} + C$$

Câu 91. Tính $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx$ bằng:

- A. $\ln|x^3+1|+C$. B. $\frac{4x^3}{x^4+4x}+C$. C. $\ln(x^3+1)+C$. D. $\frac{x^3}{x^4+x}+C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \int \frac{1}{x^3+1} d(x^3+1) = \ln|x^3+1|+C$$

Câu 92. Tính $\int \frac{6x^2-12x}{x^3-3x^2+6} dx$ bằng:

- A. $2 \ln|x^3-3x^2+6|+C$. B. $\ln|x^3-3x^2+6|+C$.
C. $\frac{1}{2} \ln|x^3-3x^2+6|+C$. D. $2 \ln(x^3-3x^2+6)+C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \frac{6x^2-12x}{x^3-3x^2+6} dx = 2 \int \frac{1}{x^3-3x^2+6} d(x^3-3x^2+6) = 2 \ln|x^3-3x^2+6|+C$$

Câu 93. Tính $\int \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+3} dx$ bằng:

- A. $\ln|x^4+x^2+3|+C$. B. $2 \ln|x^4+x^2+3|+C$.
C. $\frac{1}{2} \ln|x^4+x^2+3|+C$. D. $-2 \ln(x^4+x^2+3)+C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+3} dx = \int \frac{1}{x^4+x^2+3} d(x^4+x^2+3) = \ln|x^4+x^2+3|+C$$

Câu 94. Tính $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-1} dx$ bằng:

- A. $\frac{1}{3} \ln|x^3+3x-1|+C$. B. $\ln|x^3+3x-1|+C$.

C. $\ln|x^3 + 3x - 1| + C$.

D. $\frac{1}{3}\ln(x^3 + 3x - 1) + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^3 + 3x - 1} d(x^3 + 3x - 1) = \frac{1}{3} \ln|x^3 + 3x - 1| + C$

Câu 95. Tính $\int e^{6x-5} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{6}e^{6x-5} + C$.

B. $e^{6x-5} + C$.

C. $6e^{6x-5} + C$.

D.

$e^{6x+5} - C$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int e^{6x-5} dx = \frac{1}{6} \int e^{6x-5} d(6x-5) = \frac{1}{6} e^{6x-5} + C$

Câu 96. Tính $\int e^{-x-5} dx$ bằng:

A. $-e^{-x-5} + C$.

B. $e^{-x-5} + C$.

C. $e^{x+5} + C$.

D.

$-e^{x+5} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int e^{-x-5} dx = -\int e^{-x-5} d(-x-5) = -e^{-x-5} + C$

Câu 97. Tính $\int (5-9x)^{12} dx$ bằng:

A. $-\frac{(5-9x)^{13}}{117} + C$.

B. $\frac{(5-9x)^{13}}{117} + C$.

C. $\frac{(5-9x)^{13}}{13} + C$.

D. $\frac{(5-9x)^{13}}{9} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int (5-9x)^{12} dx = -\frac{1}{9} \int (5-9x)^{12} d(5-9x) = -\frac{(5-9x)^{13}}{117} + C$

Câu 98. Tính $\int \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) dx$ bằng

A. $\frac{1}{5} \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

B. $\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

C. $-5 \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

D. $-\frac{1}{5} \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{5} \int \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) d\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5} \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

Câu 99. Tính $\int \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$ bằng

A. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

B. $4 \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

C. $-\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

D. $\frac{1}{4} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx = \int \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} d\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

Câu 100. Tính $\int \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{2} \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

B. $\frac{1}{2} \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

C.

$-\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$. D.

$-\frac{1}{4} \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\int \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} d\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

Câu 101. Tính $\int \frac{12x+5}{3x+1} dx$ bằng

A. $4x + \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C$.

B. $\frac{6x^2 + 5x}{x^3 + x} + C$.

C. $4x + \ln|3x+1| + C$.

D. $4x + \frac{1}{3} \ln(3x+1) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \frac{12x+5}{3x+1} dx = \int \left(4 + \frac{1}{3x+1} \right) dx = 4x + \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C$$

Câu 102. Tính $\int \frac{2x^2+x}{2x-1} dx$ bằng

A. $\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$.

B. $\frac{x^2}{2} + x + \ln|2x-1| + C$.

C.

$\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C$.

D.

$\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln(2x-1) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \frac{2x^2+x}{2x-1} dx = \int \left(x+1 + \frac{1}{2x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$$

Câu 103. Tính $\int \frac{-x}{(x+1)^2} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + C$.

B. $\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + C$.

C. $-\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| + C$.

D. $-\frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \frac{-x}{(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = -\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + C$$

Câu 104. Tính $\int \sin x(2 + \cos x) dx$ bằng

A. $-2 \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

B. $2 \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

C. $2 \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

D. $2 \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \sin x(2 + \cos x) dx = \int (2 \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x) dx = -2 \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

Câu 105. Tính $\int x \cdot 2^x dx$ bằng:

A. $\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + C.$

B. $\frac{2^x(x-1)}{\ln 2} + C.$

C. $2^x(x+1) + C.$

D. $2^x(x-1) + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = 2^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{cases}$. Ta có $\int x 2^x dx = \frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx = \frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + C$

Câu 106. Tính $\int \ln x dx$ bằng:

A. $x \ln x - x + C.$

B. $x \ln x - \frac{x^2}{2} \ln x + C.$

C. $\frac{1}{x} \ln x - x + C.$

D. $x \ln x - \frac{1}{x} + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$. Ta có $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

Câu 107. Tính $\int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$ bằng:

A. $-\cos x + \tan x + C.$

B. $\cos x + \tan x + C.$

C. $\cos x - \tan x + C.$

D. $-\cos x - \frac{1}{\cos x} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có $\int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \tan x + C$

Câu 108. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ thỏa điều kiện $F(-2) = 3$ là:

A. $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{37}{3}.$

B. $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + C.$

C. $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x.$

D. $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + \frac{37}{3}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $F(x) = \int (3x^3 - 2x^2 + 1) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$ và $F(-2) = 3 \Leftrightarrow C = -\frac{37}{3}$

Vậy $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{37}{3}$

VẬN DỤNG CAO

4.1.1. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC, PHÂN THỨC.

Câu 109. Tìm $\int \frac{-x^3 + 5x + 2}{4 - x^2} dx$

A. $\frac{x^2}{2} - \ln|2 - x| + C.$

B. $\frac{x^2}{2} + \ln|2 - x| + C.$

C. $\frac{x^3}{3} - \ln|2 - x| + C.$

D. $\frac{x^3}{3} + \ln|x - 2| + C.$

Hướng dẫn giải

$$\frac{-x^3 + 5x + 2}{4 - x^2} = \frac{x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x - 1)}{(x+2)(x-2)} = x - \frac{1}{x-2}.$$
 Sử dụng bảng nguyên hàm.

Câu 110. Họ nguyên hàm của $f(x) = x^2(x^3 + 1)^5$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{18}(x^3 + 1)^6 + C.$

B. $F(x) = 18(x^3 + 1)^6 + C.$

C. $F(x) = (x^3 + 1)^6 + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{9}(x^3 + 1)^6 + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$. Khi đó

$$\int x^2(x^3 + 1)^5 dx = \frac{1}{3} \int t^5 dt = \frac{1}{18} t^6 + C = \frac{1}{18} (x^3 + 1)^6 + C.$$

Câu 111. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + x + x^3 + 1}{x^3}$ là hàm số nào?

A. $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} + x - \frac{1}{2x^2} + C.$

B. $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{2x^2} + C.$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \ln x + C.$

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \frac{x^2 + x + x^3 + 1}{x^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^3}. \text{ Sử dụng bảng nguyên hàm.}$$

Câu 112. Giá trị m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ là:

- A. $m=1$. B. $m=0$. C. $m=2$. D. $m=3$.

Hướng dẫn giải.

$$\int (3x^2 + 10x - 4) dx = x^3 + 5x^2 - 4x + C, \text{ nên } m=1.$$

Câu 113. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4(2x)$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{8}$ là:

A. $F(x) = \frac{3}{8}(x+1) - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x$.

B.

$$F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x.$$

C. $F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{3}{8}$.

D. $F(x) = x - \sin 4x + \sin 6x + \frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\begin{aligned} \sin^4(2x) &= \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2}\right) \\ &= \frac{3}{8} - \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 8x}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \int \sin^4(2x) dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 8x}{8}\right) dx = \frac{3}{8}x - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 8x}{64} + C.$$

Và $F(0) = \frac{3}{8}$ nên suy ra đáp án.

Câu 114. Biết hàm số $f(x) = (6x+1)^2$ có một nguyên hàm là $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn điều kiện $F(-1) = 20$. Tính $(a+b+c+d)$:

- A. 46. B. 44. C. 36. D. 54.

Hướng dẫn giải

$$\int (6x+1)^2 dx = \int (36x^2 + 12x + 1) dx = 12x^3 + 6x^2 + x + C \text{ nên } a=12; b=6; c=1$$

Thay $F(-1) = 20$. $d = 27$, cộng lại và chọn đáp án.

Câu 115. Hàm số $f(x) = x\sqrt{x+1}$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Nếu $F(0) = 2$ thì $F(3)$ bằng

- A. $\frac{146}{15}$. B. $\frac{116}{15}$. C. $\frac{886}{105}$. D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow 2tdt = dx$$

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \int (2t^4 - 2t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$$

Vì $F(0) = 2$ nên $C = \frac{34}{15}$. Thay $x = 3$ ta được đáp án.

Câu 116. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x \cos x$ mà $F(0) = 1$. Khi đó phát biểu nào sau đây đúng?

- A. $F(x)$ là hàm số chẵn.
B. $F(x)$ là hàm số lẻ.
C. Hàm số $F(x)$ tuần hoàn với chu kỳ là 2π .
D. Hàm số $F(x)$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

Hướng dẫn giải

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$F(0) = 1$ nên $C = 0$. Do đó $F(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 117. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $y = \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3}$ khi $F(0) = 0$ là

- A. $\ln \left| 1 + \frac{\sin^2 x}{3} \right|$. B. $\ln |1 + \sin^2 x|$. C. $\frac{\ln |2 + \sin^2 x|}{3}$. D. $\ln |\cos^2 x|$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = \sin^2 x + 3 \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\sin^2 x + 3| + C$$

vì $F(0) = 0$ nên $C = -\ln 3$. Chọn đáp án.

Câu 118. Cho $f(x) = \frac{4m}{\pi} + \sin^2 x$. Tìm m để nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$.

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\int \left(\frac{4m}{\pi} + \sin^2 x \right) dx = \frac{4m}{\pi} x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \text{ vì } F(0) = 1 \text{ nên } C = 1$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} \text{ nên tính được } m = -\frac{3}{4}$$

4.1.2. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Câu 119. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$.

A. $\int f(x) dx = \ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + C$. B.

$$\int f(x) dx = \ln |\sin x| + \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + C.$$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + C$. D.

$$\int f(x) dx = -\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + C.$$

Hướng dẫn giải

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x \cdot (1 - \sin^2 x)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x)}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{-1}{2} \ln |1 - \sin x| + \ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| + C$$

$$= \ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + C$$

Câu 120. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2 \sin^3 x}{1 + \cos x}$.

A. $\int f(x) dx = \cos^2 x - 2 \cos x + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + C$.

C. $\int f(x)dx = \cos^2 x + \cos x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\cos^2 x + 2\cos x + C.$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\int \frac{2\sin^3 x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{2\sin^2 x}{1+\cos x} \cdot \sin x dx = \int \frac{2\cos^2 x - 2}{1+\cos x} d(\cos x) \\ &= \int 2(\cos x - 1) d(\cos x) = \cos^2 x - 2\cos x + C\end{aligned}$$

Câu 121. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}.$

A. $\int f(x).dx = \frac{-\cot^4 x}{4} + C.$

B. $\int f(x).dx = \frac{\cot^4 x}{4} + C.$

C. $\int f(x).dx = \frac{\cot^2 x}{2} + C.$

D. $\int f(x).dx = \frac{\tan^4 x}{4} + C.$

Hướng dẫn giải $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x} = \int \cot^3 x \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \cot^3 x \cdot d(\cot x) = \frac{-\cot^4 x}{4} + C$

Câu 122. Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x).$

A. $\int f(x).dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin^3 2x + C.$

B. $\int f(x).dx = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin^3 2x + C.$

C. $\int f(x).dx = \sin 2x - \frac{1}{4}\sin^3 2x + C.$

D. $\int f(x).dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin^3 2x + C.$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\int \cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x) dx \\ &= \int \cos 2x \left[(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x \right] dx \\ &= \int \cos 2x \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \right) dx = \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx \\ &= \int \cos 2x dx - \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cdot d(\sin 2x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin^3 2x + C\end{aligned}$$

Câu 123. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\tan x + e^{2\sin x}) \cos x$

A. $\int f(x)dx = -\cos x + \frac{1}{2}e^{2\sin x} + C.$

B. $\int f(x)dx = \cos x + \frac{1}{2}e^{2\sin x} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\cos x + e^{2\sin x} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\cos x - \frac{1}{2}e^{2\sin x} + C.$

Hướng dẫn giải

$$\int (\tan x + e^{2\sin x}) \cos x dx = \int \sin x dx + \int e^{2\sin x} d(\sin x) = -\cos x + \frac{1}{2} e^{2\sin x} + C$$

Câu 124. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x + \sqrt{2}}$

- A. $\int f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) + C$.
- C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + C$. D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + \cos x + \sqrt{2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\left(\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) + C \end{aligned}$$

4.1.3. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ, LÔGARIT.

Câu 125. Hàm số $F(x) = \ln|\sin x - \cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số

- A. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$. B. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.
- C. $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$. D. $f(x) = \frac{1}{|\sin x - \cos x|}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } F'(x) = \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$$

Câu 126. Tính $\int 2x \ln(x-1) dx$ bằng:

- A. $(x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C$. B. $x^2 \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C$.
- C. $(x^2 + 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C$. D. $(x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \int 2x \ln(x-1) dx = (x^2 - 1) \ln(x-1) - \int (x+1) dx = (x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{2} - x + C$$

Câu 127. Tính $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$ bằng:

- A. $e^{\tan x} + C$. B. $\tan x \cdot e^{\tan x} + C$. C. $e^{-\tan x} + C$. D.
 $-e^{\tan x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^{\tan x} d(\tan x) = e^{\tan x} + C$$

Câu 128. Tính $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$ bằng:

- A. $-e^{\cos^2 x} + C$. B. $e^{-\sin 2x} + C$. C. $e^{-2\sin x} + C$. D.
 $-e^{\sin 2x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = -\int e^{\cos^2 x} d(\cos^2 x) = -e^{\cos^2 x} + C$$

Câu 129. Tính $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$ bằng:

- A. $e^{\sin^2 x} + C$. B. $e^{\sin 2x} + C$. C. $e^{\cos^2 x} + C$. D.
 $e^{2\sin x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx = \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$$

Câu 130. Kết quả $\int e^{\cos x} \sin x dx$ bằng:

- A. $-e^{\cos x} + C$. B. $e^{\cos x} + C$. C. $-e^{-\cos x} + C$. D.
 $e^{-\sin x} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int e^{\cos x} \sin x dx = -\int e^{\cos x} d(\cos x) = -e^{\cos x} + C$$

4.1.4. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC.

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\sin^2 x + 2\cos^2 x + 3}} dx = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{6 - \cos 2x}} dx = \int \frac{d(6 - \cos 2x)}{2\sqrt{6 - \cos 2x}} = \sqrt{6 - \cos 2x} + C$$

Câu 134. Biết hàm số $F(x) = (mx + n)\sqrt{2x - 1}$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-1}}. \text{ Khi đó tích của } m \text{ và } n \text{ là:}$$

- A. $-\frac{2}{9}$. B. -2 . C. $-\frac{2}{3}$. D. 0 .

Hướng dẫn giải

Cách 1: Tính $\int \frac{1-x}{\sqrt{2x-1}} dx = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)\sqrt{2x-1} + C$. Suy ra

$$m = -\frac{1}{3}; n = \frac{2}{3} \Rightarrow m.n = -\frac{2}{9}$$

Cách 2: Tính $F'(x) = \frac{3mx - m + n}{\sqrt{2x-1}}$. Suy ra $\begin{cases} 3m = -1 \\ n - m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{3} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow m.n = -\frac{2}{9}$

Câu 135. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x + 3}}$ có đồ thị đi qua điểm $(e; 2016)$. Khi đó hàm số $F(1)$ là:

- A. $\sqrt{3} + 2014$. B. $\sqrt{3} + 2016$.
C. $2\sqrt{3} + 2014$. D. $2\sqrt{3} + 2016$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 3}$ và tính được $F(x) = \sqrt{\ln^2 x + 3} + C$.

$$F(e) = 2016 \Rightarrow C = 2014 \Rightarrow F(x) = \sqrt{\ln^2 x + 3} + 2014 \Rightarrow F(1) = \sqrt{3} + 2014$$

4.1.5. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 136. Tính $\int x^3 e^x dx = e^x(ax^3 + bx^2 + cx + d) + C$. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng

- A. -2 . B. 10 . C. 2 . D. -9 .

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần.

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp đổi biến số với $u = 1 - x$.

Sử dụng phương pháp từng phần với $u = x; dv = (1 - x)^3 dx$.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng với $u = x; dv = (1 - x)^3 dx$

$$\text{Kết quả } F(x) = \int x(1-x)^3 dx = \frac{-x(1-x)^4}{4} - \frac{(1-x)^5}{20} + C$$

$$F(0) = 1 \text{ suy ra } C = \frac{21}{20}. \text{ Do đó } F(1) = \frac{21}{20}. \text{ Chọn A}$$

Câu 142. Tính $F(x) = \int (2x+1)\sin x dx = a x \cos x + b \cos x + c \sin x + C$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

- A. -1. B. 1. C. 5. D. -5.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng.

$$\text{Kết quả } F(x) = \int (2x+1)\sin x dx = -2x \cos x - \cos x + 2 \sin x + C \text{ nên } a+b+c = -1$$

Câu 143. Cho hàm số $F(x) = \int x \ln(x+1) dx$ có $F(1) = 0$. Khi đó giá trị của $F(0)$ bằng

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần với $u = \ln(x+1), dv = x dx$

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

$$\text{Kết quả } F(x) = \int x \ln(x+1) dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x) + C.$$

$$\text{Từ } F(1) = 0 \text{ suy ra } C = \frac{-1}{4}. \text{ Vậy } F(0) = \frac{-1}{4}.$$

Câu 144. Hàm số $F(x) = \int (x^2 + 1) \ln \sqrt{x} dx$ thỏa mãn $F(1) = \frac{-5}{9}$ là

A. $\frac{1}{6}(x^3 + 3x)\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2}$.

B. $\frac{1}{6}(x^3 + 3x)\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2} - 1$.

C. $\frac{1}{6}(x^3 + 3x)\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2} + \frac{10}{9}$.

D. $\frac{1}{6}(x^3 + 3x)\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2} + 1$.

Hướng dẫn giải:

Phương pháp tự luận: Sử dụng phương pháp từng phần.

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng phương pháp bảng

Kết quả $F(x) = \int (x^2 + 1)\ln \sqrt{x} dx = \frac{1}{6}(x^3 + 3x)\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2} + C$

Với $F(1) = \frac{-5}{9}$ suy ra $C = 0$ nên $F(x) = \frac{1}{6}(x^3 + 3x)\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x}{2}$.

Câu 145. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ và có đồ thị đi qua điểm $A(0;1)$.

Chọn kết quả đúng

A. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

B. $f(x) = \frac{e^x}{x+1} + 1$

C. $f(x) = \frac{e^x}{x+1} - 1$

D. $f(x) = \frac{e^x}{x+1} + 2$

Hướng dẫn giải: Sử dụng phương pháp từng phần với

$$u = xe^x, dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

u và đạo hàm của u		dv và nguyên hàm của v
xe^x		$\frac{1}{(x+1)^2}$
	+	
$(x+1)e^x$ (Chuyển $(x+1)e^x$ qua dv)		$\frac{-1}{x+1}$
	-	
1		$-e^x$ (nhận $(x+1)e^x$ từ u)

0	$-e^x$
---	--------

Kết quả $f(x) = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \frac{e^x}{x+1} + C$. Với $f(0) = 1$ suy ra $C = 0$. Vậy

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

Câu 146. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + 2$. B.

$$F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} - 2.$$

C. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + 1$. D.

$$F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}.$$

Hướng dẫn giải:

Đặt $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $dv = dx$ ta được:

$$F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C. \text{ Vì } F(0) = 1 \text{ nên } C = 2$$

$$\text{Vậy } F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + 2.$$

Câu 147. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F(\pi) = 2017$.

Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + 2017$. B.

$$F(x) = x \tan x - \ln |\cos x| + 2018.$$

C. $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + 2016$. D.

$$F(x) = x \tan x - \ln |\cos x| + 2017.$$

Hướng dẫn giải: Đặt $u = x$, $dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ ta được $du = dx$, $v = \tan x$

$$\text{Kết quả } F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C.$$

Vì $F(\pi) = 2017$ nên $C = 2017$. Vậy $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + 2017$.

Câu 148. Tính $F(x) = \int x(1 + \sin 2x)dx = Ax^2 + Bx \cos 2x + C \sin 2x + D$. Giá trị của biểu thức $A+B+C$ bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $-\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng với $u = x, dv = (1 + \sin 2x)dx$ ta được

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + D. \text{ Vậy } A + B + C = \frac{1}{4}.$$

Câu 149. Tính $F(x) = \int \frac{1+x \sin x}{\cos^2 x} dx$. Chọn kết quả đúng

A. $F(x) = \tan x + \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$. B.

$$F(x) = \tan x - \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C.$$

C. $F(x) = \tan x + \frac{x}{\cos x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$. D.

$$F(x) = \tan x - \frac{x}{\cos x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C.$$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Biến đổi $F(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x + I(x)$

Tính $I(x)$ bằng cách đặt $u = x; dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ ta được $I(x) = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos x}$

$$\text{Tính } J(x) = -\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 1} = \int \frac{d(\sin x)}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)} = \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$$

$$\text{Kết quả } F(x) = \tan x + \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$$

Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng máy tính kiểm tra $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x) = 0$

tại một số điểm ngẫu nhiên x_0 .

4.1.6. ÔN TẬP

Câu 150. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn điều kiện

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ là:}$$

- A. $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$ B. $F(x) = \cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$
C. $F(x) = -\cos x + \tan x + 1 - \sqrt{2}.$ D. $F(x) = -\cos x + \tan x.$

Hướng dẫn giải

Ta có $\int (\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}) = -\cos x + \tan x + C \Rightarrow F(x) = -\cos x + \tan x + C$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow C = \sqrt{2} - 1. \text{ Vậy } F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$$

Câu 151. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2 \sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ thỏa mãn đồ thị của hai hàm số $F(x)$ và $f(x)$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung là:

- A. $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{3}{5} x + 1.$ B. $F(x) = \frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{3}{5} x + 1.$
C. $F(x) = 10 \cos 5x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{5} x + 1.$ D. $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{3}{5} x$

Hướng dẫn giải

Ta có $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{3}{5} x + C$ và $F(0) = f(0) \Leftrightarrow C = 1$

$$\text{Vậy } F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{3}{5} x + 1$$

Câu 152. Hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$ thì $a + b + c$ bằng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. -2.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } F'(x) = f(x) \Leftrightarrow ax^2 + (2a+b)x + b+c = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

Vậy $a+b+c=1$

Câu 153. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = a + b \cos 2x$ thỏa mãn:

$$F(0) = \frac{\pi}{2}, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, F\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ là:}$$

A. $F(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7\pi}{9} \sin 2x + \frac{\pi}{2}$.

B. $F(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7\pi}{9} \sin 2x$.

C. $F(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{7\pi}{9} \sin 2x + \frac{\pi}{2}$.

D. $F(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7\pi}{9} \sin 2x - \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } F(x) = ax + \frac{b}{2} \sin 2x + C \text{ và } \begin{cases} F(0) = \frac{\pi}{2} \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \\ F\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{7\pi}{9} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy $F(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7\pi}{9} \sin 2x + \frac{\pi}{2}$

Câu 154. Cho hàm số $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$. Hàm số $F(x)$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

B. $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

C. $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$.

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } f(x) = F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ và } \begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \\ f(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 2 \\ 12a + 4b + c = 3 \\ 27a + 6b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Câu 155. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \tan x \cdot \sin 2x$ thỏa mãn điều kiện

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ là:}$$

A. $F(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

B. $F(x) = x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\pi}{4} - 1$.

C. $F(x) = \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int \tan x \cdot \sin 2x dx = \int (1 - \cos 2x) dx = x - \frac{1}{2} \sin 2x + C \Rightarrow F(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\text{và } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } F(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Câu 156. Cho hàm số $f(x) = \tan^2 x$ có nguyên hàm là $F(x)$. Đồ thị hàm số $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$. Khi đó $F(x)$ là:

A. $F(x) = \tan x - x + 2$.

B. $F(x) = \tan x + 2$.

C. $F(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x + 2$.

D. $F(x) = \cot x - x + 2$.

Hướng dẫn giải

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$$

Vì đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $A(0; 2)$ nên $C = 2$.

$$\text{Vậy } F(x) = \tan x - x + 2$$

Câu 157. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$. Giá trị của

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) \text{ bằng}$$

A. $1 - \frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $1 + \frac{\pi}{4}$.

D. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } F(x) = \tan x - x + C \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = 1 - \frac{\pi}{4}$$