MẶT TRÒN XOAY – MẶT CẦU

Phương pháp:

I. Mặt nón – hình nón và khối nón

1. Mặt nón: Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l cắt nhau tại O và tạo với nhau một góc α. Khi cho mặt phẳng (P) quay quanh đường thẳng Δ, hình tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng l gọi là mặt nón tròn xoay hay còn gọi là mặt nón

- Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt nón .
- Đường thẳng l gọi là đường sinh của mặt nón.
- Giao điểm O của Δ và l gọi đỉnh của mặt nón.
- Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và l khi đó 2α gọi là góc ở đỉnh.

2. Hình nón: Hình nón là hình tròn xoay sinh bởi tam giác vuông OAB quay quanh trục là cạnh góc vuông OA

- $OB = l$ là đường sinh hình nón .
- $AB = R$ gọi là bán kính hình nón.
- $OA = h$ là chiều cao hình nón .

3. Khối nón : Hình nón với phần không gian bên trong gọi là khối nón.

4. Thể tích và diện tích xung quanh :

- Diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi Rl$
- Diện tích toàn phần của hình nón $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi R(l + R)$.
- Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h.$

II. Mặt trụ – hình trụ và khối trụ

1. Mặt trụ: Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng l và Δ song song với nhau và cách nhau một khoảng R. Khi quay (P) quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi mà mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.

- Đường thẳng Δ là trục của mặt trụ.
- Đường thẳng l là gọi là đường sinh của mặt trụ.
- Khoảng cách giữa hai đường sinh l và trục Δ gọi là bán kính của mặt trụ.

2. Phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng song song phân biệt và vuông góc với trục mặt trụ cùng với hai hình tròn thiết diện được gọi là hình trụ.

- Hai hình tròn $(O;R),(O';R)$ là hai đáy của hình trụ .
- Đoạn thẳng OO' là trục của hình trụ , và cũng là chiều cao của hình trụ.
- Bán kính R của mặt trụ là bán kính hình trụ.

3. Hình trụ với phần không gian bên trong gọi là khối trụ .

4. Công thức tính diện tích và thể tích hình trụ .

Một hình trụ có bán kính đáy là R và chiều cao h.

a. Diện tích mặt xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rh.$

b. Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{sq} + 2.S_d = 2\pi R(R+h)$.

c. Thể tích khối trụ : $V = \pi R^2 h$.

III. Mặt cầu – Khối cầu

1. Khái niệm mặt cầu.

- Mặt cầu tâm O bán kính R (ta kí hiệu $S(O,R)$) là tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn $S(O,R) = \{M \mid OM = R\}$.
- Nếu AB là đường kính mặt cầu $S(O,R)$ thì với mọi điểm M thuộc mặt cầu (trừ A và B) thì $AMB = 90^0$.
- Ngược lại với mọi điểm M nằm trong không gian thỏa mãn $AMB = 90^0$ thì điểm M thuộc mặt cầu đường kính AB.

2. Vị trí tương đối của một điểm với mặt cầu.

Cho mặt cầu $S(O,R)$ và một điểm A bất kì trong không gian.

- Nếu $OA > R$ thì A ở ngoài mặt cầu
- Nếu $OA = R$ thì A ở trên mặt cầu
- Nếu $OA < R$ thì A ở trong mặt cầu

3. Vị trí tương đối của một hình phẳng với mặt cầu.

Cho mặt cầu $S(O,R)$ và một mặt phẳng (P) bất kì trong không gian. Gọi H là hình chiếu của O lên (P).

- Nếu $OH > R$ thì (P) không cắt mặt cầu
- Nếu $OH = R$ thì (P) và (S) có một điểm chúng duy nhất là H.

Khi đó ta nói: (P) tiếp xúc với mặt cầu và (P) gọi là mặt phẳng tiếp diện, H gọi là tiếp điểm.

- Nếu $OH < R$ thì (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn (C) có tâm H bán kính $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$.

Nếu O nằm trên (P) thì (C) gọi là đường tròn lớn và có bán kính R.

4. Vị trí tương đối của một đường thẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O,R)$ và một đường d bất kì trong không gian. Gọi H là hình chiếu của O lên d.

- Nếu $OH > R$ thì d và mặt cầu không có điểm chung.

• Nếu $OH = R$ thì d và mặt cầu (S) có một điểm chung duy nhất là H. Khi đó ta nói d tiếp xúc với mặt cầu và d gọi là tiếp tuyến cảu mặt cầu, H gọi là tiếp điểm.

• Nếu $OH < R$ thì d và mặt cầu có đúng hai điểm chung. Khi đó ta nói d cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt .

5. Mặt cầu ngoại tiếp và hình cầu nội tiếp hình đa diện.

• Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện.

• Mặt cầu nội tiếp hình đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện.

Nhận xét.

• Một đa diện có mặt cầu ngoại tiếp thì tất cả các mặt của đa diện đều có đường tròn ngoại tiếp.

• Nếu tâm mặt cầu ngoại tiếp của đa diện thuộc một mặt của đa diện thì đường tròn ngoại tiếp của đa diện đó là đường tròn lớn.

• Khoảng cách từ tâm mặt cầu nội tiếp của đa diện đến các mặt đa diện bằng nhau và bằng bán kính mặt cầu nội tiếp đa diện đó.

6. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Diện tích hình cầu bán kính R: $S = 4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu bán kính R: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Vấn đề 1. CHỨNG MINH HỆ ĐIỂM THUỘC MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU.

Phương pháp:

• Để chứng minh một hệ điểm nằm trên mặt nón, ta chứng minh đường thẳng đi qua điểm đó và đỉnh của mặt nón tạo với trục mặt nón một góc không đổi α.

• Để chứng minh một hệ điểm thuộc mặt trụ, ta chứng minh khoảng cách từ các điểm đó đến trục của mặt trụ bằng bán kính của mặt trụ.

• Để chứng minh một hệ điểm nằm trên một mặt cầu, ta có thể sử dụng các cách sau:

Cách 1: Chứng minh hệ điểm đó cách đều một điểm cố định cho trước

Cách 2: Chứng minh hệ điểm đó cùng nhìn một đoạn thẳng cố định dưới một góc vuông.

Ví dụ 1.1.5 Cho tam giác ABC vuông tại $B, BA = BC = a$. Cho S là một di động trên đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A (S không trùng A). Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC, (P) cắt SB, SC lần lượt tại H và K. Gọi I là giao điểm của HK và BC

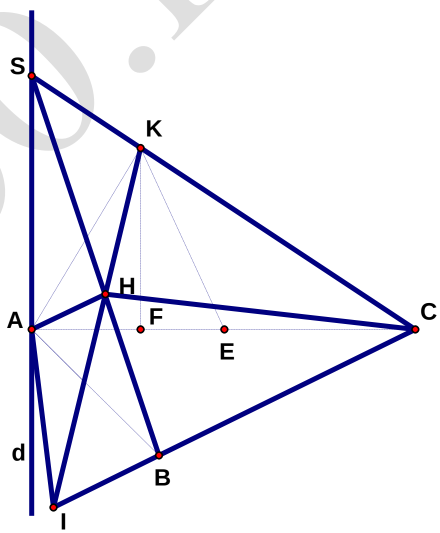
1. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, H, K cùng thuộc một mặt cầu .Tính diện tích của mặt cầu đó;

2. Khi thể tích của khối chóp $K.ABC$ đạt giá trị lớn nhất , tính thể tích của khối chóp $S.ABC$;

3. Chứng minh rằng khi S di động trên (d) thì đường thẳng AI luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Lời giải.

1. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, H, K cùng thuộc một mặt cầu .Tính diện tích của mặt cầu đó.



$$\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$$

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \subset (P) \Rightarrow AH \perp SC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

$\Rightarrow AH \perp SC \Rightarrow AHC = 90^0$

$AK \subset (P) \Rightarrow AK \perp SC \Rightarrow AKC = 90^0$.

Ta có : $AHC = AKC = ABC = 90^0 \Rightarrow 5$ điểm A, B, C, H, K thuộc mặt cầu (α) đường kính AC.

Tam giác ABC vuông cân tại B có $BA = BC = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}.$

Diện tích của mặt cầu (α) :

$$S_{mc} = 4\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2.$$

2.Khi thể tích của khối chóp $K.ABC$ đạt giá trị lớn nhất , tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

Gọi E là trung điểm của AC và F là hình chiếu vuông góc của K lên AC, ta có : $KF \perp (ABC)$ (do $KF // SA$) và $KF \le KC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối chóp K.ABC : $V = \frac{1}{3} S_{ABC}.KF$.

Vì S_{ABC} không đổi nên

V lớn nhất $\Leftrightarrow$ KF lớn nhất $\Leftrightarrow KF = KC$

$\Leftrightarrow F \equiv E \Leftrightarrow K$ là trung điểm của SC.

Khi đó : $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.KF = \frac{1}{6} AB.AC.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

3.Chứng minh đường thẳng AI luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

$$\begin{cases} AI \subset (ABC) \Rightarrow AI \perp SA \\ AI \subset (P) \Rightarrow AI \perp SC \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SAC) \Rightarrow AI \perp AC.$$

Suy ra AI luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định (α) đường kính AC.

Ví dụ 2.1.5

Lời giải.

CÁC BÀI TÓAN LUYỆN TẬP

Bi 1

1. Trong mặt phẳng (P) cho một điểm O cố định. Xét một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua O sao cho góc giữa l và mặt phẳng (P) luôn luôn bằng α không đổi $(\alpha \neq 90^0)$. Chứng minh rằng l luôn nằm trên một mặt nón cố định.

2. Cho mặt phẳng (α). Gọi A là một điểm nằm trên mặt phẳng (α) và B là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho hình chiếu H của B trên mặt phẳng (α) không trùng với A. Một điểm M chạy trên mặt phẳng (α) sao cho sao cho $ABM = BMH$. Chứng minh rằng điểm M luôn nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là AB.

3. Cho điểm A nằm ở ngoài mặt cầu (S). Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A tiếp xúc với mặt cầu (S) luôn nằm trên một mặt nón cố định.

4. Trong không gian cho hai điểm A, B phân biệt cố định, và một điểm M bất kỳ trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB có diện tích S không đổi. Chứng minh điểm M thuộc một mặt trụ cố định, xác định bán kính mặt trụ đó.

Bi 2

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$; $AC \perp BD$. Chứng minh rằng 6 trung điểm của 6 cạnh nằm trên một mặt cầu.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Biết $SA = a, AB = b, AD = c$. Chứng minh các điểm A, B, C, D, M, N, P thuộc một mặt cầu. Tính bán kính của mặt cầu đó.

3. Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại K, L, M, N. Gọi P là một điểm bất kì trong không gian không nằm trên các mặt của tứ diện. Các đường thẳng PK, PL, PM, PN một lần nữa cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB, PBC, PCD, PDA lần lượt tại Q, R, S, T. Chứng minh rằng các điểm P, Q, R, S và T nằm trên một mặt cầu.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bi 3

1. Trong hình phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mp(P) lấy một điểm S bất kỳ. Gọi (Q) là hình phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh rằng bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng thuộc một hình cầu cố định. Xác định bán kính hình cầu đó.

2. Chứng minh rằng nếu hai đường tròn $(O_1), (O_1)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt thì các điểm nằm trên hai đường tròn đó nằm trên một mặt cầu.

Bi 4

Cho tứ diện gần đều $ABCD$ (tức là $AB = CD, BC = AD,\ AC = BD$). Chứng minh rằng bốn chân đường cao hạ xuống các mặt, bốn trung điểm của các đường cao và bốn trực tâm của bốn mặt là 12 điểm nằm trên mặt cầu.

Vấn đề 2. CÁC BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH VÀ THIẾT DIỆN CỦA KHỐI NÓN, KHỐI TRỤ.

Phương pháp:

1) Khối nón:

- Phải xác định được bán kính, đường cao hoặc đường sinh, hoặc góc ở đỉnh của hình nón.
- Thiết diện qua đỉnh hình nón là một tam giác cân.

- Thiết diện vuông góc với trục hình nón là một hình tròn.

2) Khối trụ

- Phải xác định được chiều cao h và bán kính R của hình trụ .
- Nếu thiết diện của hình trụ song song hoặc chứa trục của hình trụ thì thiết diện đó là hình chữ nhật.
- Nếu thiết diện của hình trụ vuông góc với trục hình trụ thì thiết diện đó là hình tròn.

Ví dụ 1.2.5 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SO = h, SAB = 45^0$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

Lời giải.

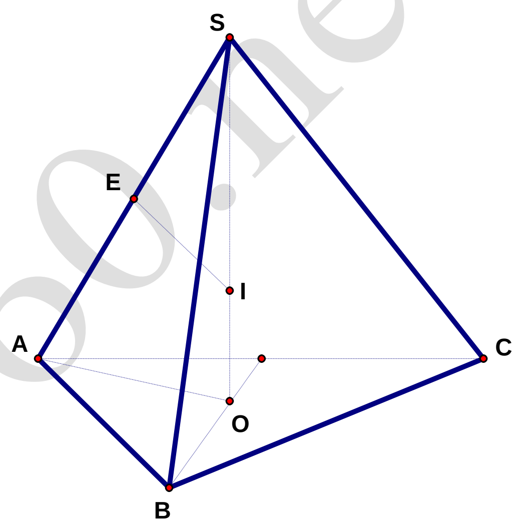
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta có $SO \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (SOA) dựng đường trung trực (d) của SA cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu $(ABCD)$.

Thật vậy: $I \in SO$ là trục của tam giác $ABC \Rightarrow SA = SB = SC$.

$I \in (d) \Rightarrow IA = IS$

$\Rightarrow IA = IB = IC = IS$



Hai tam giác vuông SOA và SEI đồng dạng (E là trung điểm của AB). Suy ra

$$\frac{SO}{SE} = \frac{SA}{SI} \Rightarrow R = SI = \frac{SA.SE}{SO} = \frac{1}{2}\frac{SA^2}{SO}.$$

Tam giác cân SAB có $SAB = 45^0 \Rightarrow$ Tam giác này vuông cân tại S.

Đặt $SA = x$, khi đó $AB = x\sqrt{2}$, $OA = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{x\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác vuông SOA : $SA^2 - OA^2 = SO^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{6x^2}{9} = h^2$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3h^2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}\frac{3h^2}{h} = \frac{3h}{2}.$$

Ví dụ 2.2.5 Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và DBC chứa trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết $BC = a, BAC = 60^0$, $BDC = 30^0$. Tính bán kính và thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ABC và E là trung điểm của BC, ta có

$O_1E \perp BC \Rightarrow O_1E \perp (ABC)(do(ABC) \perp (BCD))$

$O_2E \perp BC \Rightarrow O_2E \perp (BCD)$

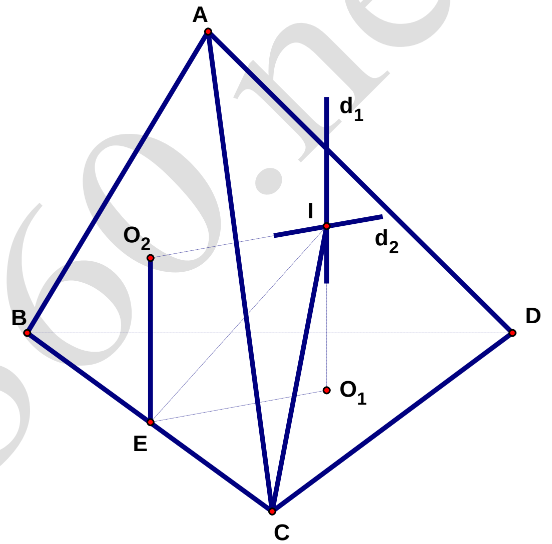
Qua O_1 dựng đường thẳng d_1 vuông góc với (BCD) thì d_1 là trục của tam giác (BCD) và $d_1 \,//\, O_2E$.

Qua O_2 dựng đường thẳng d_2 vuông góc với (ABC) thì d_2 là trục của tam giác ABC và $d_2 \,//\, O_1E$.

Tâm I của mặt cầu là giao điểm của d_1, d_2. Thật vậy :

$I \in d_1 \Rightarrow IB = IC = ID$

$I \in d_2 \Rightarrow IA = IB = IC$



$\Rightarrow IA = IB = IC = ID \Rightarrow$ I là tâm mặt cầu $ABCD$.

Tứ giác EO_1IO_2 là hình chữ nhật, suy ra: $IE^2 = O_1E^2 + O_2E^2$.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính các đường tròn (BCD) và (ABC), ta có

$$O_1E^2 = O_1C^2 - EC^2 = R_1^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = R_1^2 - \frac{BC^2}{4} \quad , O_2E^2 = O_2C^2 - EC^2 = R_2^2 - \frac{BC^2}{4}$$

Suy ra : $IE^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{BC^2}{2} \Rightarrow R^2 = IE^2 + EC^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{BC^2}{4}$.

Áp dụng định lí hàm số sin trong các tam giác BDC, BAC, ta có

$$\frac{BC}{\sin BDC} = 2R_1 \Rightarrow \frac{a}{2\sin 30^0} = R_1 \Rightarrow R_1 = a.$$

$\dfrac{BC}{\sin BAC} = 2R_2 \Rightarrow \dfrac{a}{2\sin 60^0} = R_2 \Rightarrow R_2 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $R^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{3} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{12} \Rightarrow R = a\sqrt{\dfrac{13}{12}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

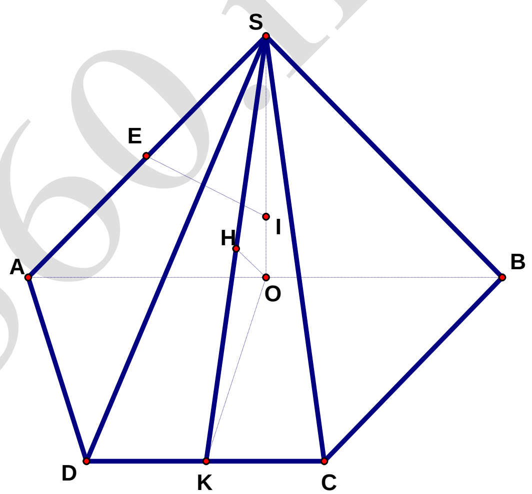
Thể tích của khối cầu $(ABCD): V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{39}}{6}\right)^3$.

Ví dụ 3.2.5 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = SD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \,//\, CD, AB = 2a, BC = CD = DA = a$, khoảng cách giữa AB và SC bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

Lời giải.

Hình thang $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AB chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là trung điểm của AB, vì $SA = SB = SC = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Trong mặt phẳng (SAB), đường trung trực của SA cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp



$S.ABCD$. Hai tam giác vuông SOA và SEI đồng dạng (E là trung điểm của AB).

Suy ra $\dfrac{SO}{SE} = \dfrac{SA}{SI} \Rightarrow R = SI = \dfrac{SA.SE}{SO} = \dfrac{1}{2}\dfrac{SA^2}{SO}$.

$CD \,//\, AB \Rightarrow (SCD) \,//\, AB \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(O, (SCD))$.

Gọi K là trung điểm của CD, H là hình chiếu vuông góc của O lên SK, ta có

$\begin{cases} CD \perp OK \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOK) \Rightarrow CD \perp OH.$

$\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp SK \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow OH = d(AB, SC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOK,

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}\Rightarrow\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{3a^2}$$

$$\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{6}}{2},\ SA^2=SO^2+OA^2=\frac{3a^2}{2}+a^2=\frac{5a^2}{2}\Rightarrow R=\frac{1}{2}.\frac{\frac{5a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}=\frac{5a}{2\sqrt{6}}.$$

Ví dụ 4.2.5 Cho hình chóp $SABC$ có SA,SB,SC vuông góc với nhau từng đôi một . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$

1. Nêu cách dựng tâm I và chứng minh ba điểm S,G,I thẳng hàng.Tính tỉ số $\frac{GI}{GS}$

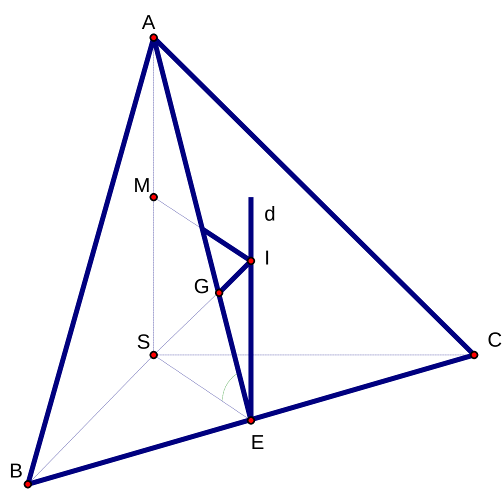
2. Cho $SB=SC$ góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là 60^0, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ bằng $\frac{3}{2}a$. Tính V của khối chóp $S.ABC$

Lời giải.

1. Nêu cách dựng tâm I và chứng minh ba điểm S,G,I thẳng hàng.Tính $\frac{GI}{GS}$.

Vì tam giác SBC vuông tại S, gọi E là trung điểm của BC thì E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. Dựng đường thẳng d vuông góc (SBC) tại E thì d là trục của tam giác SBC và d song song với SA (do $SA\perp(SBC)$).

Trong mặt phẳng (d,SA), từ trung điểm M của đoạn SA dựng đường thẳng vuông góc với SA và cắt d tại I thì MI là đường trung trực của đoạn



SA và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

Thật vậy :

* $I\in d\Rightarrow IS=IB=IC.$

* $I \in$ đường trung trực của $SA \Rightarrow IA = IS$.
Do đó $IA = IB = IC = IS$, suy ra đpcm.
Trong mặt phẳng (SA,d), đoạn AE cắt đoạn SI tại G'. Áp dụng định lí Ta-let ,ta có: $\frac{IE}{SA} = \frac{G'E}{G'A} = \frac{G'I}{G'S}$ (1)

Dễ thấy tứ giác $SEIM$ là hình chữ nhật , do đó $IE = MS = \frac{1}{2}SA$ .Thay vào (1) ta được $\frac{G'E}{G'A} = \frac{G'I}{G'S} = \frac{1}{2}$

AE là trung tuyến của tam giác ABC, G' thuộc đoạn AE và $\frac{G'E}{G'A} = \frac{1}{2}$ nên G' là trọng tâm của tam giác ABC, tức là $G' \equiv G$. Vậy ba điểm S, G, I thẳng hàng và cũng từ (1) ,ta có $\frac{GI}{GS} = \frac{1}{2}$.

2. Tính V của khối chóp $S.ABC$.
$SB = SC \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S $\Rightarrow BC \perp SE$, lại có $BC \perp SA$
$\Rightarrow$ $BC \perp (SAE) \Rightarrow ((SBC),(SAE)) = (AE,SE) = SEA = 60^0$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là IS, theo giả thiết, ta có : $IS = \frac{3}{2}a$.

Theo kết quả câu 1) , $\frac{GI}{GS} = \frac{1}{2} \Rightarrow SG = \frac{2}{3}SI = a$,

Đặt $SE = x(x > 0)$. Tam giác vuông ASE (vuông tại S) có $SEA = 60^0$ nên là nửa tam giác đều, suy ra $AS = x\sqrt{3}$, $AE = 2x$

G là trọng tâm của tam giác ABC nên $EG = \frac{1}{3}AE = \frac{2x}{3}$.
Áp dụng định lí hàm cosin trong tam giác SEG, ta có:

$$SG^2 = SE^2 + EG^2 - 2SE.EG.\cos SEA \Rightarrow a^2 = x^2 + \frac{4x^2}{9} - 2x.\frac{2x}{3}\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{7x^2}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{9a^2}{7} \Rightarrow x = \frac{3a}{\sqrt{7}} \Rightarrow SB = SE\sqrt{2} = x\sqrt{2}$$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$:

$$V = \frac{1}{3}S_{SBC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}SB^2.x\sqrt{3} = \frac{1}{6}x^3\sqrt{3} = \frac{1}{6}\left(\frac{3a}{\sqrt{7}}\right)^3\sqrt{3} = \frac{9a^3\sqrt{3}}{14\sqrt{7}}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình nón.

b) Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích thiết diện này.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông tại A, $ABC = 60^0$. Biết rằng có một hình nón nội tiếp hình chóp đã cho với bán kính đáy là r, góc giữa đường sinh và đáy hình nón là β.

a) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón .

b) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp.

3. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $SAO = 30^0, SAB = 60^0$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

Bài 2 Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh $2R$.

1. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của khối trụ.

2. Tính thể tích khối trụ.

3. Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

Bài 3

1. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A. Trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

Bài 4 Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng R, góc ở đỉnh là 2α với $45^0 < \alpha < 90^0$.

1. Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón.

2. Tìm diện tích thiết diện do mặt phẳng (P) cắt hình nón theo hai đường sinh vuông góc với nhau.

3. Xét hai điểm M, N thay đổi trên đáy sao cho góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy hình nón bằng β. Chứng minh rằng đường thẳng SI với I là trung điểm MN luôn thuộc một mặt nón cố định.

Bài 5

Cho hình nón (N) có đỉnh S và đường tròn đáy tâm O. Tồn tại một hình chóp $M.ABC$ có tam giác ABC với $AB = AC, BAC = 30^0$ nội tiếp trong đường tròn (O), điểm M thuộc đường sinh và hình chiếu H của M trên mặt đáy là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính tỉ số thể tích khối chóp và thể tích khối nón.

Bài 6 Một hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O, O' có bán kính r và có đường cao $h = \sqrt{2}r$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho $OA \perp O'B$.

1. Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện $OABO'$ là những tam giác vuông. Tính diện tích tứ diện này.

2. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với trục OO'. Tính khoảng cách giữa trục OO' và mặt phẳng (α).

3. Chứng minh rằng mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt trụ trục OO' có bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}r}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 7

Bên trong hình trụ có một hình vuông $ABCD$ cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh A, B nằm trên đường trong đáy thứ nhất, hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng chứa hình vuông tạo với đáy một góc

45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối trụ.

Bài 8 Cho hai điểm cố định A, B có $AB = a$. Với mỗi điểm C trong không gian sao cho tam giác ABC đều, kí hiệu AD là đường cao của tam giác ABC. Trong mặt phẳng chứa d và AD, xét đường tròn đường kính AD. Gọi S là một giao điểm của đường tròn này với đường thẳng d.

1. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

2. Chứng minh rằng khi điểm C thay đổi thì điểm S thuộc một đường tròn cố định và mỗi đường thẳng SA, SB thuộc một mặt nón cố định.

Bài 9 Một hình nón có hai đáy là $(O; R)$, $(O'; R)$ và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

1. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ,

2. Tính thể tích khối trụ tương ứng,

3. Tính thể tích khối lăng trụ đứng tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp khối trụ (trong đó các hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ nội tiếp (O) và (O')),

4. Lấy M là một điểm bất kì trên đường tròn $(O';R)$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MAC khi M thay đổi trên $(O';R)$,
5. Gọi N là điểm đối xứng với M qua O'. Xác định vị trí MN sao cho thể tích của tứ diện $ACMN$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó.
Bài 10 Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O;R)$ và $(O';R)$, chiều cao của hình trụ là h, AB là một đường kính cố định trên đường tròn (O) và M là một điểm thay đổi trên đường tròn (O').
1. Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
2. Tính thể tích khối lăng trụ n _ giác đều nội tiếp, ngoại tiếp hình trụ.
Bi 11 Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O;R)$ và $(O';R)$, chiều cao của hình trụ là h. AB là một đường kính cố định trên đường tròn (O) và M là một điểm thay đổi trên đường tròn (O').
1. Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
2. Gọi N là điểm đối xứng với M qua O'. Tìm vị trí của MN sao cho thể tích tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất.
3. Tính thể tích khối lăng trụ n – giác đều nội tiếp, ngoại tiếp hình trụ.

Vấn đề 3. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP VÀ LĂNG TRỤ.

Phương pháp:
1) Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp
Hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đáy là đa giác nội tiếp.
Để xác định tậm của mặt cầu ngoài tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ ta thường thực hiện các bước sau:

- Xác định tâm I đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_2$.
- Kẻ Ix vuông góc với mặt phẳng $(A_1A_2...A_2)$.
- Xác định mặt phẳng (P) là trung trực một cạnh bên SA_i.
- Tâm O là giao điểm của Ix và (P). Bán kính $R = SO = OA_i$.

Chú ý:
- Trong hình chóp đều thì đường cao của hình chóp là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

- Trong trường hợp trục đường tròn ngoại tiếp đáy đồng phẳng với một cạnh bên(như hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, hay hình chóp đều,...) thay vì tìm xác định mặt phẳng trung trực ta đi xác định đường thẳng trung trực.
- Trong một số bài toán chỉ yêu cầu xác định bán kính mặt cầu ngoại ta có thể đưa về tìm bán kính của đường tròn lớn.
- Nếu hình chóp là một tứ diện có một mặt là tam giác đặc biệt như tam giác vuông, đều hoặc cân nên chọn tam giác đó làm đáy.
- Nếu xác định đươc đoạn thẳng MN cố định và các đỉnh của hình chóp cùng nhìn đoạn MN dưới một góc vuông thì tâm hình cầu là trung điểm đoạn MN và $R = \dfrac{MN}{2}$.
- Nếu xác định được điểm O thỏa mãn $OS = OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$ thì O chính là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Trong nhiều bài toán thay vì đi xác định bán kính của mặt cầu ta đi xác định bán kính của đường tròn lớn.

2) Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ

- Một lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đó là lăng trụ đứng và đáy là đa giác nội tiếp.
- Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là trung điểm của đoạn nối hai tâm của hai đáy.

3) Vị trị tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

- Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(I,R) \Leftrightarrow d(I,\Delta) = R$
- Đường thẳng Δ cắt mặt cầu $S(I,R)$ tại hai điểm A, B $\Leftrightarrow d(I,\Delta) < R$.

Khi đó gọi H là hình chiếu của I lên AB, ta có H là trung điểm AB và $IH^2 + AH^2 = R^2$

4) Vị trị tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

- Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(I,R) \Leftrightarrow d(I,(P)) = R$, khi đó tiếp điểm H là hình chiếu của tâm I lên mặt phẳng (P).
- Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(I,R) \Leftrightarrow d(I,(P)) < R$, khi đó giao tuyến của chúng là đường tròn có tâm H là hình chiếu I lên (P) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.

5) Mặt cầu nội tiếp hình chóp:

- Là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp
- Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp. Khi đó I cách đều tất cả các mặt của hình chóp.

• Giả sử hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$ có mặt cầu nội tiếp tâm I bán kính r. Gọi V là thể tích khối chóp và $\sum S$ là diện tích toàn phần của hình chóp. Khi đó

$$V = \frac{1}{3}\sum S.r\,.$$

Nhận xét:

1. Từ công thức trên ta có công thức tính bán kính mặt cầu nội tiếp của một hình

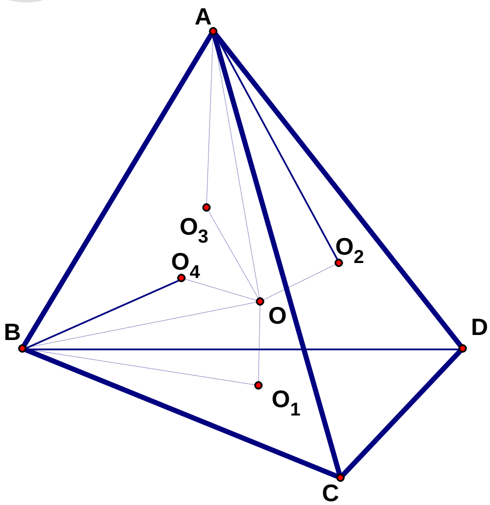
chóp là $r = \dfrac{3V}{\sum S}$. Đối với một số bài toán việc xác tâm mặt cầu ngoại tiếp rất khó

nên ta có thể vận dụng công thức trên để xác định bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

2. Đối với hình chóp đều tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp thuộc đường cao hình chóp.

Ví dụ 1.3.5 Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD, BC = AD, AC = BD$. Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện $ABCD$ cũng là tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện đó.

Lời giải.



Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện $ABCD$, ta có $OA = OB = OC = OD$. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (BCD), $(ACD), (ABD), (ABC)$ thì O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác này.

Các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC bằng nhau (c.c.c) nên các bán kính

R_1, R_2, R_3, R_4 của đường tròn ngoại tiếp các tam giác này bằng nhau.

Các tam giác vuông $OO_1B, OO_2A, OO_3A, OO_4B$ cho

$$OO_1^2 = OB^2 - R_1^2, OO_2^2 = OA^2 - R_2^2, OO_3^2 = OA^2 - R_3^2, OO_4^2 = OB^2 - R_4^2$$

$\Rightarrow OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4$

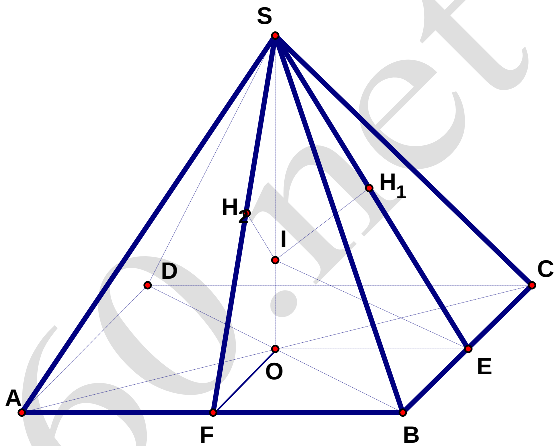
$\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 2.3.5 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = a$ (O là tâm của hình vuông $ABCD$). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB. Trong tam giác vuông SOE, đường phân giác trong của góc SEO cắt SO tại I, ta chứng minh I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Gọi H_1, H_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên SE, SF.



$$\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp OE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOE) \Rightarrow BC \perp IH_1$$

$$\begin{cases} IH_1 \perp SE \\ IH_1 \perp BC \end{cases} \Rightarrow IH_1 \perp (SBC) \Rightarrow IH_1 = d\left(I,(SBC)\right)$$

Tương tự $IH_2 = d\left(I,(SAB)\right)$.

Hai tam giác vuông SOE và SOF có SO chung, $OE = OF$ nên chúng bằng nhau suy ra hai đoạn tương ứng IH_1, IH_2 bằng nhau. Chứng minh tương tự ta có I cách đều 4 mặt bên của hình chóp đã cho.

Mặt khác I thuộc đường phân giác trong của $SEO \Rightarrow IO = IH_1$.

Vậy I cách đều tất cả các mặt của hình chóp $SABCD$ mà I ở trong hình chóp do đó I là tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp $S.ABCD$.

Áp dụng tính chất của chân đường phân giác ta có

$$\frac{IO}{IS}=\frac{OE}{SE}\Rightarrow\frac{IO}{IO+IS}=\frac{OE}{OE+SE}\Rightarrow\frac{IO}{SO}=\frac{OE}{OE+SE}$$

$$\Rightarrow IO=\frac{SO.OE}{OE+SE}=\frac{a.\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}=\frac{a}{1+\sqrt{5}}.$$

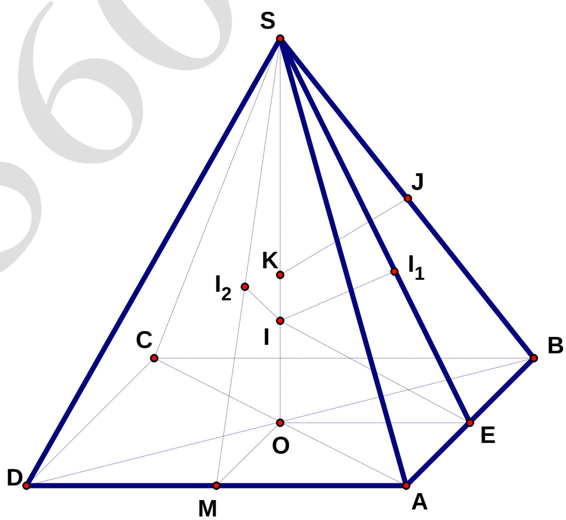
Vậy bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $r=\frac{a}{1+\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3.3.5 Một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và $\widehat{ASB}=\alpha$.
1. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp;
2. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp;
3. Chứng minh rằng hai tâm mặt cầu đó trùng nhau khi và chỉ khi $\alpha=45^0$.

Lời giải.
1.Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp .

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có SO vuông góc với $\left(ABCD\right)$ và SO là trục của hình vuông $ABCD$.
Trong mặt phẳng $\left(SBO\right)$,đường trung trực $\left(d\right)$ của cạnh SB cắt SO tại K, ta có
$K\in SO\Rightarrow KA=KB=KC=KD$

$K\in\left(d\right)\Rightarrow KB=KS$
$\Rightarrow KA=KB=KC=KD=KS$



Vậy K là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Hai tam giác vuông SOB và SJK đồng dạng (J là trung điểm của SB) suy ra:

$$\frac{SK}{SB}=\frac{SJ}{SO}\Rightarrow SK=\frac{SB.SJ}{SO}=\frac{SB^2}{2SO}\quad\left(1\right)$$

Gọi E là trung điểm của AB

Trong tam giác vuông SEB: $SB = \dfrac{EB}{\cos ESB} = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Trong tam giác vuông SOE,

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Từ (1) suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

$$R = SK = \frac{\dfrac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}.$$

2.Xác định tâm và bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$**.**

Gọi E,M lần lượt là trung điểm của AB, AD và I là chân đường phân giác của SEO. Gọi I_1, I_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên SE, SM.

$$\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp II_1$$

$II_1 \perp AB, II_1 \perp SE \Rightarrow II_1 \perp (SAB) \Rightarrow II_1 = d(I,(SAB))$

Tương tự $II_2 = d(I,(SAD))$.

Hai tam giác vuông SOE và SOM bằng nhau suy ra hai đoạn tương ứng $II_1 = II_2$

$\Rightarrow d(I,(SAB)) = d(I,(SAD))$

Chứng minh tương tự ta có I cách đều 4 mặt bên của hình chóp $S.ABCD$,

$IO = d(I,(ABCD))$ và I là chân đường phân giác trong của $SEO \Rightarrow IO = II_1$.

I ở trong hình chóp $S.ABCD$ và I cách đều tất cả các mặt của hình chóp $S.ABCD$ nên I là tâm của mặt cầu nội tiếp của hình chóp này.

Áp dụng tính chất của chân đường phân giác ta có :

$$\frac{IO}{IS} = \frac{ES}{EO} \Rightarrow \frac{IO}{IS+IO} = \frac{ES}{ES+EO} \Rightarrow \frac{IO}{SO} = \frac{ES}{ES+EO}$$

$$\Rightarrow r = IO = \frac{SO.ES}{ES+EO} = \frac{\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.\dfrac{a}{2}\cot\dfrac{\alpha}{2}}{\dfrac{a}{2}\cot\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}\cot\frac{\alpha}{2}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.Chứng minh rằng hai tâm mặt cầu đó trùng nhau khi và chỉ khi $\alpha = 45^0$.

Khi K trùng với I ta có $\begin{cases} KI_1 = KO \\ KS = KA \end{cases} \Rightarrow \Delta SKI_1 = \Delta KOA \Rightarrow I_1S = OA.$

OA là bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Mặt khác khi K trùng I thì I_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác SAB nên I_1S là bán kính của đường tròn này .

Suy ra $\dfrac{AB}{\sin ASB} = \dfrac{AB}{\sin ACB} \Rightarrow \sin ASB = \sin ACB \Rightarrow ASB = ACB$

Mặt khác khi $\alpha = 45^0$ thì hai bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác SAB và ACB bằng nhau $\Rightarrow d\left(K,(SAB)\right) = d\left(K,(ABCD)\right)$.

$\Rightarrow K$ cách đều các mặt của hình chóp $S.ABCD$ $\Rightarrow K$ trùng với I.

Vậy $K \equiv I \Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc bằng 60^0. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa cạnh bên SB với đáy là 60^0. ΔABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $ACB = 30^0$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, M, N nằm trên một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó biết rằng $BAC = \alpha, BC = a.$

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $(SBC) \perp (ABC)$ và $AB = AC = SA = SB = a$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp khi $SC = x$.

Bài 2

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BAD = 60^0$ và các cạnh bên $SA = SB = SC$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $SBCD$ biết $BSD = 90^0$.

Bài 3

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D, $AB = AD = a, CD = 2a$. Cạnh bên $SD \perp (ABCD)$ và $SD = a$. Gọi E là trung điểm của DC. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

2. Trong hình phẳng (P) cho nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2R$. Qua A kẻ đường thẳng Ax vuông góc với (P), trên Ax lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (P) bằng 60^0. Xác định tâm và bán kính hình cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D.

Bài 4

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$, các cạnh còn lại bằng $\sqrt{74}$. Hãy tìm bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm những điểm M sao cho trọng tâm của các tứ diện $MBCD, MCDA, MDAB, MABC$ cách đều tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 5

1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$; $ABC = 60^0$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.

Bài 6

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 7

Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (O). Gọi A_0, B_0, C_0, D_0 lần lượt là trọng tâm của các mặt BCD, CDA, DAB, ABC. Kẻ các đường kính AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 .Chứng minh rằng:

1.Các đường thẳng $A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0, D_1D_0$ đồng quy tại điểm H ,

2.Các đường thẳng đi qua H và trung điểm của cạnh thì vuông góc với cạnh đối diện.

Bài 8

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác ABC với góc nhọn $BAC = \alpha; BC = k; AA' = h$.

1.Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình trụ.

2. ả sử mp$(BCC'B')$ thay đổi nhưng $AB + AC = a$ (a không đổi). Cho $\alpha = 60^0$ và h không đổi. Tìm k để bán kính mặt cầu bé nhất.

Bài 9

Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp trong mặt cầu bán kính r , tìm hình chóp có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Bài 10

Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, nhận AB làm đường vuông góc chung. Trên tia Ax lấy điểm M , trên tia By lấy điểm N sao cho $AM + BN = MN$.

1.Tìm vị trí của M, N sao cho bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABMN$ là lớn nhất.

2. Chứng minh rằng khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABMN$ là nhỏ nhất.

Bài 11

Cho hình cầu tâm O bán kính R . Lấy một điểm A ở trên mặt cầu và gọi (P) là mp đi qua A sao cho góc giữa (P) và OA bằng 30^0 .

a) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (P) và mặt cầu.

b) Đường thẳng d đi qua A vuông góc với mp(P) cắt mặt cầu tại B . Tính độ dài đoạn AB .

Bài 12

Cho hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2) cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P') .

a) Chứng minh có mặt cầu đi qua hai đường tròn đó.

b) Tìm bán kính R của mặt cầu biết $r_1 = 5; r_2 = \sqrt{10}; AB = 6;$ $O_1O_2 = \sqrt{21}$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 13

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với đáy một góc 45^0. Một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc với cạnh bên BS kéo dài tại H. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm I của mặt cầu và trung điểm đường cao BD của đáy. Tính bán kính cầu đó.

Bài 14

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a$, $BAC = 120^0$, $CAD = 60^0$, $DAB = 90^0$. Xác định bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và $ASB = \alpha$.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

c) Tìm giá trị của α để tâm mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp trùng nhau.

3. Cho hình cầu bán kính R. Từ một điểm S trên mặt cầu vẽ ba cát tuyến bằng nhau cắt mặt cầu tại A, B, C sao cho $ASB = BSC = CSA = \alpha$. Tìm α để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.

Bài 15

1. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G, nội tiếp trong một mặt cầu $(O; R)$. Các đường thẳng GA, GB, GC, GD lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A', B', C', D'. Chứng minh: $V_{ABCD} \le V_{A'B'C'D'}$

2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ đỉnh S, cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.

a) Tính các bán kính R và r của hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp tương ứng hình chóp đó.

b) Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp, hình cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp. Xác định quan hệ giữa a và h sao cho :

b1) $\frac{V_2}{V}$ đạt giá trị lớn nhất. b2) $\frac{V_2}{V_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

3. Giả sử mặt cầu có tâm I thuộc cạnh AB, bán kính r_I tiếp xúc với các cạnh AC, AD, BC và BD; mặt cầu tâm J thuộc cạnh CD, bán kính r_J

tiếp xúc với các cạnh CA, CB, DA, DB của hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh: $\frac{AB^4}{CD^4} = \frac{AB^2 - 4r_I^2}{CD^2 - 4r_J^2}$.

4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SO = 1$ và cạnh đáy của tam giác ABC bằng $2\sqrt{6}$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB, AC tương ứng . Tìm bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp $S.AMN$.

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh 2a**,** góc $\angle ABC = 60^0$. Đường cao SO=b. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

6. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$. Hai mặt ACD và BCD là những tam giác đều cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Xác định x khi DM là đường cao của tứ diện $ABCD$.

b) Giả sử DM vuông góc với $mp(ABC)$. Tính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.