Vấn đề 4 . MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

Phương pháp:

1) Lập phương trình mặt cầu:

• Để lập phương trình mặt cầu ta cần tìm tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R. Khi đó phương trình mặt cầu có dạng:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad (1).$$

• Ngoài ra để lập phương trình mặt cầu ta có thể tìm các hệ số a,b,c,d trong phương trình : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2).

Với tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R^2=a^2+b^2+c^2-d>0$.

• Một mặt cầu được hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính hoặc biết đường kính.

2) Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu tâm I, bán kính R và mặt phẳng (α), $h=d\left(I,(\alpha)\right)$, H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α).

- $h>R$ thì (α) và mặt cầu (I) không giao nhau
- $h=R$ thì (α) và mặt cầu (I) tiếp xúc nhau tại H
- $h<R$ thì (α) và mặt cầu (I) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn tâm H, bán kính $r=\sqrt{R^2-h^2}$.

3) Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ, $h=d\left(I,\Delta\right)$, H là hình chiếu của I lên mặt phẳng Δ.

- $h>R$ thì Δ và mặt cầu (I) không giao nhau
- $h=R$ thì Δ và mặt cầu (I) tiếp xúc nhau tại H. Hay Δ là tiếp tuyến của mặt cầu (I).
- $h<R$ thì Δ và mặt cầu (I) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B và H là trung điểm của dây cung AB, do đó: $R^2=\dfrac{AB^2}{4}+h^2$.

Ví dụ 1.4.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC=8$

Lời giải.

Đường thẳng Δ qua $M(-2;2;-3)$ và có $\vec{u}=(2;3;2)$

vtcp; $d(A,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=3$

Gọi H là hình chiếu của A lên Δ thì $AH=3$ và H là trung điểm của BC nên $BH=4$. Vậy bán kính mặt cầu là $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=5$.

Nên phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.

Ví dụ 2.4.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$:

Cho đường thẳng Δ có phương trình: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ, bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P) ***Đề thi ĐH Khối D – 2011***

Lời giải.

Gọi (S) là mặt cầu cần tìm, I là tâm.

Phương trình tham số đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=3+4t\\z=t\end{cases}$

Vì $I\in\Delta\Rightarrow I(1+2t;3+4t;t)$.

Ta có (P) tiếp xúc với (S)

nên $d(I,(P))=1\Leftrightarrow\dfrac{|2(1+2t)-(3+4t)+2t|}{3}=1\Leftrightarrow t=2, t=-1$

- $t=2\Rightarrow I(5;11;2)\Rightarrow$ phương trình mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-11)^2+(z-2)^2=1$
- $t=-1\Rightarrow I(-1;-1;-1)$, suy ra phương trình $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$.

Ví dụ 3.4.6 Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ cho $I(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+5=0$

1. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) với mp(P) là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π;

2. Chứng minh rằng mặt cầu (S) nói trong phần 1 tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 2x-2=y+3=z$;

3. Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với (S).

Lời giải.

1. Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn (C).

Ta có: $2\pi r=8\pi \Rightarrow r=4$ và $d(I,(P))=3$ nên $R=\sqrt{r^2+d^2(I,(P))}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$.

2. Đường thẳng Δ có $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;2;2)$ là VTCP và đi qua $A(1;-3;0)$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}=(0;5;-2) \Rightarrow [\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AI}]=(-14;2;5) \Rightarrow d(I,\Delta)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AI}]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}=5$

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Cách 2.

Phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=2t \end{cases}$, thay vào phương trình mặt cầu (S),

ta được: $t^2+(2t-5)^2+(2t+2)^2=25 \Leftrightarrow (3t-2)^2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$

Suy ra mặt cầu (S) và Δ giao nhau tại một điểm $M(\frac{5}{3};-\frac{5}{3};\frac{4}{3})$.

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M.

3. Vì mp(Q) chứa Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) nên M là tiếp điểm của mp(Q) và mặt cầu (S)

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua M và nhận $\overrightarrow{IM}\left(\frac{2}{3};-\frac{11}{3};\frac{10}{3}\right)$ làm VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x-11y+10z-35=0$.

Ví dụ 4.4.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$

1. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm $M(1;-5;2)$ và qua đường tròn (C) là giao của mp $(\alpha): 2x+2y-z+9=0$ và mặt cầu

$(S'): x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z-40=0$

2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $d: \begin{cases} x=t \\ y=-2+t \\ z=-6+2t \end{cases}$ sao cho giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu

$(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ là đường tròn có bán kính $r=1$.

Lời giải.

1. Cách 1.

Mặt cầu (S') có tâm $I'(-1;2;2), R'=7$,

$d(I',(\alpha))=\frac{|-2+4-2+9|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=3<R'$ nên đường tròn (C) tồn tại và có bán kính $r=2\sqrt{10}$. Gọi H là tâm của (C)

Ta có $I'H\perp(\alpha)\Rightarrow I'H: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+2t \\ z=2-t \end{cases}$. Suy ra tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+2t \\ z=2-t \\ 2x+2y-z+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow H(-3;0;3)$$

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm H và vuông góc với (α), suy ra phương trình của d : $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S), vì (S) đi qua đường tròn (C) nên $I \in d$

Suy ra $I(-3+2t; 2t; 3-t) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = (2t-4; 2t+5; 1-t)$,

$d(I,(\alpha)) = \dfrac{|9t|}{3} = 3|t|$

Mặt khác, ta có:

$IM^2 = r^2 + d^2(I,(\alpha)) \Leftrightarrow (2t-4)^2 + (2t+5)^2 + (1-t)^2 = 40 + 9t^2$

$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-5; -2; 4),\ R = IM = 7$.

Vậy phương trình $(S) : (x+5)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 49$.

Cách 2.

Vì mặt cầu (S) đi qua đường tròn (C) nên phương trình (S) có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 + \lambda(2x + 2y - z + 9) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + (2+2\lambda)x - (4-2\lambda)y - (4+\lambda)z - 40 + 9\lambda = 0$.

Vì $M(1; -5; 2) \in (S) \Rightarrow 44 - 10\lambda - 40 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y - 8z - 4 = 0$.

2. Đường thẳng d đi qua $A(0; -2; -6)$ và có $\vec{u} = (1; 1; 2)$ là VTCP
Phương trình của (P) có dạng: $ax + b(y+2) + c(z+6) = 0$
Hay $ax + by + cz + 2b + 6c = 0$

Trong đó $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ và $a + b + 2c = 0 \Rightarrow a = -b - 2c$ (1)
Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -1)$, bán kính $R = 2$

Theo giả thiết, ta suy ra $d(I,(P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{3}$

Do đó: $\dfrac{|-a + 3b + 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |4b + 7c| = \sqrt{3}.\sqrt{(b+2c)^2 + b^2 + c^2}$

$\Leftrightarrow (4b+7c)^2 = 3(2b^2+4bc+5c^2) \Leftrightarrow 5b^2+22bc+17c^2 = 0 \Leftrightarrow b=-c, b=-\frac{17}{5}c$

- $b=-c$ ta chọn $c=-1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow (P): x+y-z-4=0$
- $b=-\frac{17}{5}c$ ta chọn

$c=5 \Rightarrow b=-17 \Rightarrow a=7 \Rightarrow (P): 7x-17y+5z-4=0$.

Ví dụ 5.4.6 Lập phương trình mặt phẳng (P) biết:

1. (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau có phương trình:

$$\Delta_1: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{1}, \quad \Delta_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}.$$

2. (P) chứa hai đường thẳng song song có phương trình:

$$\Delta_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}, \quad \Delta_3: \frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

3. (P) chứa đường thẳng Δ_1 và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình:

$(S): \ x^2+y^2+z^2-8x+2y+4z+7=0.$

4. (P) chứa đường thẳng Δ_3 và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính lớn nhất.

5. (P) chứa đường thẳng Δ_2 và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{210}}{6}$.

Lời giải.

1. Đường thẳng Δ_1 qua $M_1(0;-1;-1)$ và $\vec{u}_{\Delta_1}(1;1;1)$. Đường thẳng Δ_2 qua $M_2(-2;2;0)$ và $\vec{u}_{\Delta_2}(2;-3;-1)$.

Cặp véc tơ chỉ phương của (P) là $\vec{u}_{\Delta_1}(1;1;1)$ và $\vec{u}_{\Delta_2}(2;-3;-1)$, nên một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = \left[\vec{u}_{\Delta_1};\vec{u}_{\Delta_2}\right] = (2;3;-5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là

$$2(x-0)+3(y+1)-5(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-5z-2=0.$$

2. Đường thẳng Δ_3 qua $M_3(-2;1;3)$ và $\vec{u}_{\Delta_3}(-2;3;1)$.

Cặp véc tơ chỉ phương của (P) là $\vec{u}_{\Delta_2}(2;-3;-1)$ và $\overrightarrow{M_2M_3}(0;-1;3)$ nên một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = \left[\vec{u}_{\Delta_2};\overrightarrow{M_2M_3}\right] = -2(5;3;1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng Δ_2 và Δ_3 là

$$5(x+2)+3(y-1)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow 5x+3y+z+4=0.$$

3. Vì (P) chứa đường thẳng Δ_1 nên (P) đi qua hai điểm thuộc Δ_1 là điểm $M_1(0;-1;-1)$ và $N_1(1;0;0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua M_1 có dạng

$$a(x-0)+b(y+1)+c(z+1)=0,\ a^2+b^2+c^2>0.$$

Vì (P) qua N_1 nên $c=-b-a$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(4;-1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{14}$.

(P) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d(I;(P))=R$, hay

$$\frac{|4a+b.0+(-b-a).(-1)|}{\sqrt{a^2+b^2+(-b-a)^2}}=\sqrt{14} \Leftrightarrow |5a+b|=\sqrt{14(2a^2+2ab+2b^2)}$$

$$\Leftrightarrow a^2+6ab+9b^2=0 \Leftrightarrow a=-3b.$$

Chọn $b=-1$ thì $a=3;\ c=-2$ nên phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$(P):\ 3x-y-2z-3=0.$$

4. Đường tròn giao tuyến có bán kính lớn nhất khi và chỉ khi đường tròn đó qua tâm mặt cầu. Tức là mặt phẳng (P) chứa Δ_3 và đi qua tâm $I(4;-1;-2)$.

Ta có $\vec{u}_{\Delta_3}(-2;3;1)$ và $\overrightarrow{IM_3}(-6;2;5)$ nên một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u}_{\Delta_3};\overrightarrow{IM_3}\right]=(13;4;14)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là $(P):\ 13x+4y+14z-20=0.$

5. Vì (P) chứa đường thẳng Δ_2 nên (P) đi qua hai điểm thuộc Δ_2 là điểm $M_2(-2;2;0)$ và $N_2(0;-1;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua M_1 có dạng

$$a(x+2)+b(y-2)+c(z-0)=0,\ a^2+b^2+c^2>0.$$

Vì (P) qua N_2 nên $c=2a-3b$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng $r=\frac{\sqrt{210}}{6}$ nên

$$d^2(I;(P))=R^2-r^2=14-\frac{210}{36}=\frac{49}{6}\Rightarrow d(I;(P))=\frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Do đó $\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{|6a-3b+(2a-3b).(-2)|}{\sqrt{a^2+b^2+(2a-3b)^2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6}\left|2a+3b\right| = 7\sqrt{5a^2-12ab+10b^2}$$

$$\Leftrightarrow 221a^2-660ab+435b^2=0 \Leftrightarrow a=2b;\ a=\frac{218}{221}b.$$

Nếu $a=2b$ thì chọn $b=1$ ta có $a=2;\ c=1$ nên phương trình mặt phẳng $(P):\ 2x+y+z+2=0.$

Nếu $a=\frac{218}{221}b$ thì chọn $b=221$ ta có $a=218;\ c=-227$ nên phương trình mặt phẳng $(P):\ 218x+221y-227z-6=0.$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là

$(P):\ 2x+y+z+2=0$ và $(P):\ 218x+221y-227z-6=0.$

CÁC BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1 Lập phương trình mặt cầu (S) biết

1. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $R=\sqrt{5}$

2. Mặt cầu (S) có tâm nằm trên Ox và đi qua $A(1;2;1)$, $B(3;1;-2)$

3. Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $mp(P): 2x-y+2z+4=0$.

4. Mặt cầu (S) đi qua $C(2;-4;3)$ và các hình chiếu của C lên ba trục tọa độ.

5. Mặt cầu (S) có tâm nằm trên $mp(Oxy)$ và đi qua $M(1;0;2)$, $N(-2;1;1)$, và $P(-1;-1;1)$.

6. Có tâm $I(6;3;-4)$ và tiếp xúc với Oy

Bài 2 Lập phương trình mặt cầu (S), biết (S):

1. Có tâm $I(1;1;2)$ và tiếp xúc với mp $(P): x+2y+2z+1=0$;

2. Có bán kính $R=3$ và tiếp xúc với mp $(P): x+2y+2z+3=0$ tại điểm $A(1;1;-3)$;

3. Có tâm nằm trên đường thẳng $d: \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z-2=0$ và $(Q): x+2y-2z+4=0$;

4. Đi qua bốn điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$, $C(-2;2;2)$ và $D(1;-1;2)$;

5. Có tâm thuộc mp $(P): x+y+z-2=0$ và đi qua ba điểm $A(2;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;1)$;

6. Có tâm nằm trên đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2\\ y=0\end{cases}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P):\ x-2z-8=0$ và $(Q):\ 2x-z+5=0$.

Bài 3 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3), C(0;3;3), D(3;3;3)$.

1. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,D.

2. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 4 Lập phương trình mặt cầu $S(I;\ R)$ biết

1. Mặt cầu có tâm $I(2;3;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$$\Delta:\ \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}.$$

2. Mặt cầu có tâm $I(1;3;5)$ và cắt $\Delta':\ \frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{1}$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=12$.

3. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $d:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$, đi qua $M(2;3;20)$ và tiếp xúc với $d':\ \frac{x+4}{3}=\frac{y+6}{2}=\frac{z+19}{-2}$.

Bài 5 Lập phương trình mặt cầu $S(I,R)$ biết

1. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $\Delta:\ \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha_1):\ 3x+2y+z-6=0$ và mặt phẳng $(\alpha_2):2x+3y+z=0$

2. Mặt cầu có tâm $I(1;3;5)$ và cắt $\Delta':\ \frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{1}$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=12$

3. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $d:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2}$, đi qua $M(1;1;4)$ và tiếp xúc với $d':\ \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-4}$.

Bài 6 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình : $2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Bài 7 Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9$. Chứng minh rằng

1. Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x+2y+z+5=0$. Tìm tọa độ tiếp điểm M.

2. Mặt cầu cắt đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tọa độ các giao điểm đó.

Bài 8. Lập phương trình mặt cầu $S(I;\,R)$ tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha_1):\ 6x-3y-2z-35=0,\ (\alpha_1):\ 6x-3y-2z+63=0$. Đồng thời mặt cầu

1. Có một tiếp điểm là $A(5;\,-1;\,-1)$.

2. Qua hai điểm $B(1;\,3;\,-2),\ C(-1;\,0;\,-3)$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 9. Lập phương trình đường thẳng Δ biết

1. Δ song song với $(P):\ x-y+z=0$ và cắt đường thẳng $\Delta_1;\ \Delta_2$ lần lượt tại A,B sao cho $AB=\sqrt{2}$ với $\Delta_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2},\quad \Delta_2:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

2. Δ thuộc mặt phẳng $(Q):\ x+y+z+2=0$, vuông góc với đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ đồng thời khoảng cách từ giao điểm của d và (Q) đến Δ bằng $\sqrt{42}$.

3. Δ qua điểm $C(0;\,5;\,0)$, vuông góc với đường thẳng d_1 và tiếp xúc với mặt cầu (S) với $d_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ và

$(S):\ x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+5=0$.

Bài 10. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+m=0$. Tìm m sao cho

1. Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(P):\ x-2y+2z-1=0$.

2. Mặt cầu cắt mặt phẳng $(Q):2x-y-2z+1=0$ theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 4π .

3. Mặt cầu cắt đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB vuông (I là tâm mặt cầu).

Bài 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$

1. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y-z+1=0,\ (\beta): x+2y-2z-4=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$.

2. Cho mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-m^2-3m=0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm m để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Với m vừa tìm được hãy xác định tọa độ tiếp điểm

3. Cho hai đường thẳng có phương trình

$$\Delta_1: \frac{x+2}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{-1},\ \Delta_2: \begin{cases} x=3-t \\ y=1 \\ z=10+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Gọi A,B lần lượt là các điểm trên Δ_1, Δ_2 sao cho AB vuông góc với Δ_1 và Δ_2. Lập phương trình mặt cầu tiếp xúc với Δ_1 tại điểm A, tiếp xúc với Δ_2 tại điểm B.

Bài 12. Cho đường tròn (C) là giao tuyến của $(\alpha): x-2y+2z+1=0$ và mặt cầu
$(S): x^2+y^2+z^2-4x+6y+6z+17=0$

1. Xác định tâm và bán kính của đường tròn (C)

2. Viết phương trình mặt cầu (S') chứa đường tròn (C) và có tâm nằm trên $(P): x+y+z+3=0$.

Bài 13. Trong không gian với hệ toạ độ Đề-các vuông góc $Oxyz$ cho hai mặt phẳng song song có các phương trình tương ứng là:
$(P_1): 2x-y+2z-1=0$; $(P_2): 2x-y+2z+5=0$ và điểm $A(-1;1;1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng đó. Gọi (S) là mặt cầu bất kỳ qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$

1. Chứng tỏ rằng bán kính của hình cầu (S) là một hằng số và tính bán kính đó.
2. Gọi I là tâm của hình cầu (S). Chứng tỏ rằng I thuộc một đường tròn cố định. Xác định toạ độ của tâm và tính bán kính của đường tròn đó.