CHỦ ĐỀ: KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN VÀ PHÉP BIẾN HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

A.TÓM TẮT KIẾN THỨC.

I. Khối đa diện

1) Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung , hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của hai đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như thế gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các *đỉnh, cạnh* của hình đa diện.

2) Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là *điểm ngoài* của khối đa diện.

Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện được gọi là *điểm trong* của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là *miền trong*, tập hợp các điểm ngoài được gọi là *miền ngoài* của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi hình đa diện ứng với nó. Ta gọi mỗi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong , ngoài…của khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong , ngoài…của hình đa diện tương ứng.

3) Hai đa diện bằng nhau

3.1. Phép dời hình trong không gian

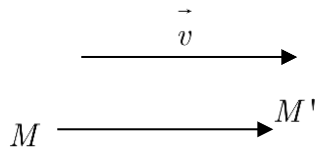
Phép biến hình trong không gian được gọi là *phép dời hình* nếu bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

Vậy: Nếu F là một phép dời hình và $F\left(M\right)=M',F\left(N\right)=N'$ thì

$M'N'=MN$.

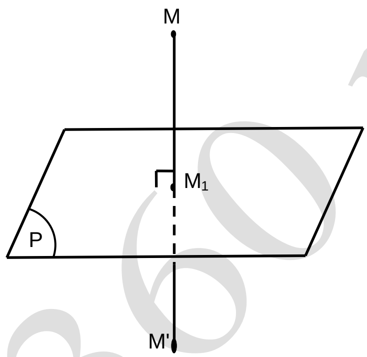
3.2. Một số phép biến hình thường gặp trong không gian

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ **(kí hiệu:** $T_{\vec{v}}$**):** $T_{\vec{v}}\left(M\right)=M'\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v}$

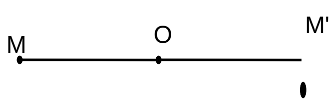


b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P): Là phép biến hình biến mỗi điểm *M* thuộc (*P*) thành chính nó, biến mỗi điểm *M* không thuộc (*P*) thành điểm *M’* sao cho (*P*) là mặt phẳng trung trực của *MM’*.

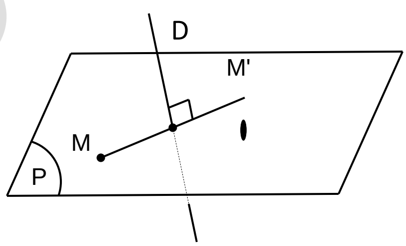
Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (*P*) biến hình (*H*) thành chính nó thì (*P*) được gọi là *mặt phẳng đối xứng của hình (H).*



c) Phép đối xứng tâm O: là phép biến hình biến điểm *O* thành chính nó, biến mỗi điểm *M* khác *O* thành điểm *M’* sao cho *O* là trung điểm của *MM’*



Nếu phép đối xứng tâm *O* biến hình (*H*) thành chính nó thì *O* được gọi là *tâm đối xứng của hình (H).*



d)Phép đối xứng qua đường thẳng Δ: là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc Δ thành chính nó, biến mỗi điểm *M* không thuộc Δ thành *M’* sao cho Δ là trung trực của *MM’*

Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình (*H*) thành chính nó Δ được gọi là *trục đối xứng* của hình (*H*).

e) Phép vị tự tâm O tỉ số k: *là phép biến hình biến điểm mỗi điểm M trong không gian thành điểm M' sao cho* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

3. Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình thì ta được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (*H*) thành đa diện (*H'*) và biến đỉnh , cạnh, mặt của (*H*) thành đỉnh , cạnh, mặt của (*H'*) tương ứng.
- Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

3.3. Phân chia và lắp ghép khối đa diện

Nếu khối đa diện (H) là hợp của (H_1) và (H_2), sao cho (H_1) và (H_2) không có điểm chung trong thì ta nói có thể chia (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép được hai khối đa diện (H_1) và (H_2) thành khối đa diện (H).

II. Khối đa diện lồi – Khối đa diện đều

- Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của (H) luôn thuộc (H)
- Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có hai tính chất
  - * Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
  - * Mỗi đỉnh của chúng là đỉnh chung của đúng q mặt.
  - * Khối đa diện đều đó được gọi là khối đa diện đều loại $\{p,q\}$.

Gọi D, M, C lần lượt là số đỉnh, số cạnh, số mặt của khối đa diện lồi (H) thì đặc số Euler của (H) là $\chi(H) = D - C + M = 2$ (định lý Euler).

III. Thể tích khối đa diện

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy *B* và chiều cao *h* là: $V = \frac{1}{3}Bh$.
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy *B* và chiều cao *h* là: $V = Bh$.
- Thể tích của khối hộp có diện tích đáy *B* và chiều cao *h* là: $V = Bh$.
- Thể tích khối hộp chữ nhật : $V = abc$.
- Thể tích khối lập phương: $V = a^3$.
- Tỉ số thể tích: Nếu A', B', C' thuộc các cạnh SA, SB, SC của hình chóp

$S.ABC$ thì : $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SA.SC}$.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÓAN.

Vì phần này chỉ có mục đích giới thiệu cho học sinh các khái niệm cơ bản của khối đa diện và một số phép biến hình trong không gian, do đó trong các dạng tóan dưới đây chỉ đề cập vấn đề vận dụng phép biến hình để giải một số dạng tóan hình học không gian .

Vấn đề 1. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CẠNH, ĐỈNH VÀ MẶT HÌNH ĐA DIỆN, CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Phương pháp:

- Dựa vào định nghĩa hình đa diện
- Dựa vào định lí Euler về mối quan hệ giữa số đỉnh, số cạnh và số mặt.
- Dựa vào giả thiết của bài toán ,chọn một phép biến hình thích hợp và vận dụng các tính chất của phép biến hình này để giải.
- Để tìm tập hợp điểm M ,ta tìm một phép biến hình f biến M thành điểm N ,trong đó tập hợp của N đã biết hay dễ tìm .Khi đó tập hợp điểm M là ảnh của tập hợp điểm N qua phép biến hình f.

Ví dụ 1.1.1 Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là những tam giác thì tổng các mặt của nó phải là một số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4,6,8,10.

Lời giải.

Gọi số cạnh và số mặt của đa diện lần lượt là c và m . Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của đa diện là

$c=\frac{3m}{2}\Rightarrow 3m=2c\Rightarrow 3m$ chia hết cho 2 mà 3 không chia hết cho 2 nên m phải chia hết cho 2 , nghĩa là m là số chẵn.

*Khối đa diện $ABCD$ có 4 mặt mà mỗi mặt là một tam giác .

*Xét tam giác BCD và hai điểm A,E ở về hai phía của mặt phẳng $\left(BCD\right)$. Khi đó ta có khối lục diện $ABCDE$ có 6 mặt là những tam giác .

*Khối bát diện $ABCDEF$ có 8 mặt là những tam giác .

*Xét ngũ giác $ABCDE$ và hai điểm M,N ở về hai phía của mặt phẳng chứa ngũ giác. Khi đó ta có khối thập diện $MABCDEN$ có 10 mặt là những tam giác .

Ví dụ 2.1.1 Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn.

Lời giải.

Gọi k là số đỉnh của đa diện và C là số cạnh của đa diện .

Ta có:

-Tại đỉnh thứ 1 có $(2n_1+1)$ mặt nên có $(2n_1+1)$ cạnh qua đỉnh thứ nhất.

-Tại đỉnh thứ hai có $(2n_2+1)$ mặt nên có $(2n_2+1)$ cạnh qua đỉnh thứ hai.

………………………………………………………………………………..

-Tại đỉnh thứ k có $(2n_k+1)$ mặt nên có $(2n_k+1)$ cạnh qua đỉnh thứ k.

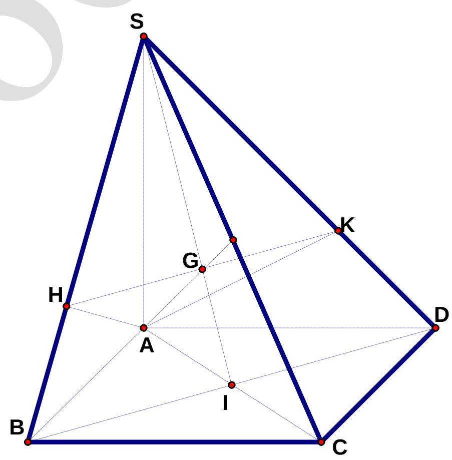
Mặt khác vì mỗi cạnh đi qua hai đỉnh nên ta có

$$2C=(2n_1+1)+(2n_2+1)+.....+(2n_k+1)$$
$$=k+2(n_1+n_2+....+n_k)$$
$$\Rightarrow k=2\left[C-(n_1+n_2+....+n_k)\right]$$

$\Rightarrow$ k là số chẵn (đpcm).

Ví dụ 3.1.1 Cho hình chóp $S.ABCD$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD; G là trọng tâm của tam giác SAC. Chứng minh ba điểm H,G,K thẳng hàng.

Lời giải.



$$SA\perp(ABCD)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp AB\\ SA\perp AD\end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta SAB,\Delta SAD$ vuông tại A.

Xét tam giác vuông SAB, ta có:

$$SB^2=SA^2+AB^2=2a^2+a^2=3a^2$$

$$SA^2=SH.SB\Rightarrow\frac{SH}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{2}{3}.$$

Chứng minh tương tự ,ta cũng có :

$$\frac{SK}{SD}=\frac{2}{3}.$$

Gọi I là giao điểm của AC và BD thì I là trung điểm của AC nên G thuộc SI và $\frac{SG}{SI}=\frac{2}{3}$.

Gọi f là phép vị tự tâm S, tỉ số $\frac{2}{3}$, ta có:

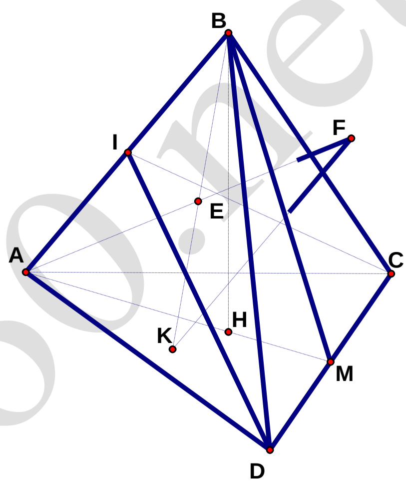
$$f(B)=H,f(I)=G,f(D)=K$$

Vì B, I, D thẳng hàng nên H, I, K cũng thẳng hàng

Ví dụ 4.1.1 Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi (P) là mặt trung trực của cạnh AB, K là một điểm trong tam giác ACD và E là giao điểm của BK và $(P), F$ là điểm đối xứng của K qua (P). Chứng minh rằng ba điểm A, E, F thẳng hàng và $EA + EF \geq \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên bốn mặt của nó là 4 tam giác đều bằng nhau. Gọi I là trung điểm của AB, khi đó ta có $DI \perp AB, CI \perp AB$, suy ra (CDI) là mặt trung trực của AB tức là $(CDI) \equiv (P)$.



Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)

biến : $E \to E$, $B \to A$, $K \to F$

Vì B, E, K thẳng hàng nên A, E, F thẳng hàng

Lại có $EA = EB, EF = EK$, suy ra $EA + EF = EB + EK = BK$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (ACD) và M là trung điểm của CD. thì H là tâm của tam giác ACD và $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông BHA:

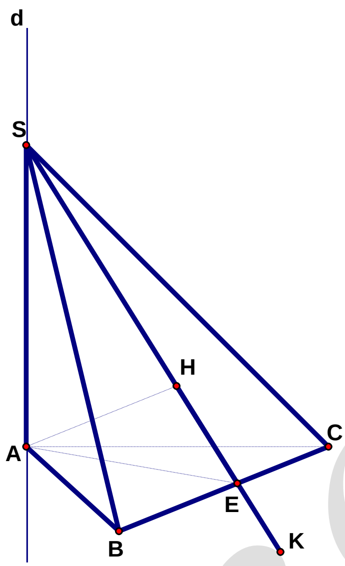
$$BH^2 = BA^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

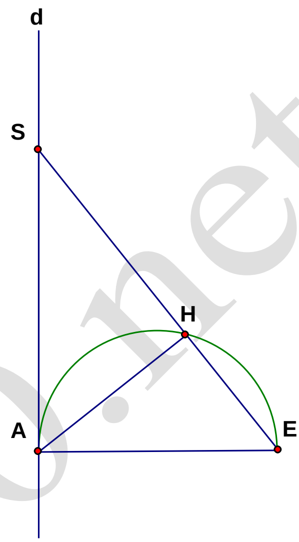
Lại có $BK \geq BH$, suy ra $EA + EF \geq \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đpcm).

Ví dụ 5.1.1 Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Gọi S là một điểm di động trên d và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SBC).

1. Chứng minh H là trực tậm của tam giác SBC.
2. Gọi K là giao điểm của SH với đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. Tìm tập hợp các điểm K khi S di động trên đường thẳng d

Lời giải.





1.Chứng minh H là trực tâm của tam giác SBC.

Ta có : $BC \perp SA$,$BC \perp AH \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH \;\; (1)$

$\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp SC$. Lại có

$SC \perp AH \Rightarrow SC \perp (ABH) \Rightarrow SC \perp BH (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của tam giác SBC.

2.Tập hợp các điểm K.

Theo tính chất của trực tâm , nếu K là giao điểm của SH với đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC thì K và H đối xứng với nhau qua đường thẳng BC.

Gọi E là giao điểm của SH với BC, ta có $BC \perp (SAH)$, suy ra $BC \perp AE$; E là hình chiếu vuông góc của A lên BC nên E cố định.

$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SE$.

Trong mặt phẳng cố định (E,d), $AHE = 90^0$ do đó tập hợp H là đường tròn (C) đường kính AE chứa trong mặt phẳng (E,d) loại bỏ điểm E (do H không thể trùng E)

H và K đối xứng với nhau qua đường thẳng BC, suy ra tập hợp K là ảnh của tập hợp H qua phép đối xứng trục BC.

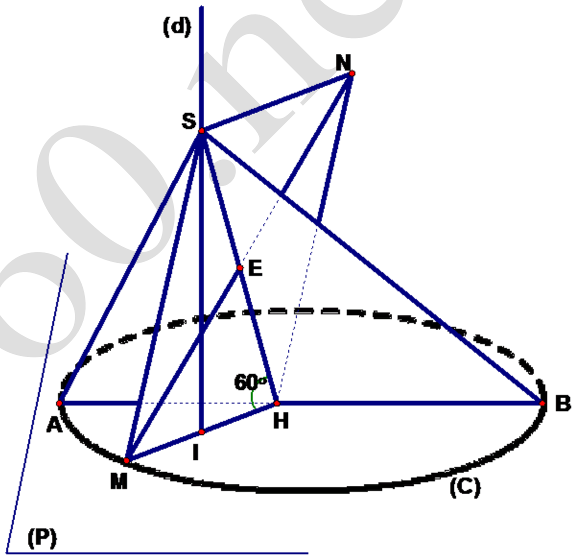
Ví dụ 6.1.1 Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) đường kính AB; M là một điểm di động trên (C), H là hình chiếu vuông góc của M lên AB. Gọi I là trung điểm của MH và (d) là đường thẳng vuông góc với (P) tại I; trên (d) lấy một điểm S sao cho $\widehat{SHM}=60^0$. Dựng hình bình hành $SMHN$. Tìm tập hợp các điểm N khi M di động trên đường tròn.

Lời giải.

Ta có : $\begin{cases} AB\perp MH \\ AB\perp SI \end{cases}$

$\Rightarrow AB\perp(SMH)$

$\Rightarrow \widehat{SHM}=\widehat{((SAB),(P))}$



Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng cố định AB và hợp với mặt phẳng cố định (P) một góc không đổi $\widehat{SHM}=60^0$ nên mặt phẳng (SAB) cố định.

Tam giác SMH có $SI\perp MH$ tại trung điểm I của MH nên là tam giác cân , lại có $\widehat{SHM}=60^0$ nên tam giác SMH là tam giác đều .

Gọi E là giao điểm của MN và SH, vì tứ giác $SMHN$ là hình bình hành nên E là trung điểm của MN và SH, suy ra $MN\perp SH$. Mặt khác $MN\subset(SMH)$ nên $MN\perp AB$, suy ra $MN\perp(SAB)$ tại E và vì E là trung điểm của MN do đó N và M là hai điểm đối xứng qua mặt phẳng (SAB). Lại có tập hợp các điểm M là đường tròn (C), suy ra tập hợp các điểm N là đường tròn (C') đối xứng của đường tròn (C) qua mặt phẳng (SAB)

CÁC BÀI LUYỆN TẬP

1. Tìm số đỉnh, số cạnh và số mặt nhỏ nhất có thể có của một hình đa diện.

2. Tính số đỉnh, số mặt và số cạnh của một khối đa đều diện loại $\{n; p\}$. Từ đó hãy tìm tất cả các đa diện đều loại $\{n; p\}$.

3. Cho (H) là đa diện có $2q+1$ $(q \in \mathbb{N}, q \geq 2)$ mặt , các mặt của nó là những đa giác có đúng p cạnh. Chứng minh p là số chẵn.

4. Cho một hình đa diện có số cạnh, số mặt và số đỉnh lần lượt là $c, m, \tilde{n}$. Chứng minh rằng: a) $c > m$ b) $c > \tilde{n}$

5. Chứng minh rằng không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

6. Chứng minh rằng trong một khối đa diện bất kỳ, tồn tại hai đỉnh mà số cạnh xuất phát từ mỗi đỉnh này bằng nhau.

Bài 2

1. Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba cạnh thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn.

2. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì đó là khối tứ diện .

3. Chứng minh rằng một hình tứ diện không thể có tâm đối xứng

Bài 3

1. Chứng minh rằng một khối đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

2. Chứng minh rằng mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

3. Chứng minh rằng trong một khối đa diện bất kỳ tồn tại mặt có số cạnh nhỏ hơn 6.

Bài 4

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên CD; C' và D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của C và D lên AB . Chứng minh $A'C' = B'D'$ và $A'D' = B'C'$

2.Trong mặt phẳng , cho tứ giác lồi $ABCD$ có $ABD = 120^0$, $ABC = 75^0$, $BCD = 60^0$, $AB = a$, $CD = a\sqrt{2}$. Dựng hai tia Bx, Cy cùng vuông góc với (P) và cùng chiều , trên Bx, Cy lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho góc giữa EF và (P) là 60^0 .Tính độ dài đoạn EF theo a

3. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi E, F, O lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và EF . Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trong tứ diện ta có : $MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD.$

Bài 5

1. Cho mặt phẳng (P), A , B là hai điểm ở cùng một phía đối với mặt phẳng (P). Tìm điểm M trên (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất .

2. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến c và một đoạn thẳng AB ở trong (P), song song với c. Gọi O là hình chiếu vuông góc của trung điểm I của AB lên c; Oz là đường thẳng chứa trong (Q) và quay quanh O . Chứng minh rằng $AOz+BOz$ không đổi.

3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, một mặt phẳng (P) không trùng với mặt phẳng (ABC) và cắt các cạnh CA,CB. Gọi a,b,c,h lần lượt là khoảng cách từ A,B,C và G đến mặt phẳng (P). Chứng minh $h=\frac{1}{3}(a+b-c)$.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm của 6 cạnh $A'B',B'B,BC,CD,DD',D'A'$ cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài 6

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh BC; H là hình chiếu vuông góc của S lên DM và K là điểm đối xứng của H qua D. Tìm tập hợp các điểm K.

2. Trong mặt phẳng (P), cho góc xAx' và một điểm B không thuộc (P) . Gọi tia By là ảnh của tia Ax' qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AB}$.Trên hai tia Ax,By lần lượt lấy hai điểm di động M,N sao cho $AM=BN$. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.

3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Từ M dựng các đường thẳng song song với SA,SB,SC, các đường thẳng này cắt các mặt SBC,SCA,SAB lần lượt tại các điểm A',B',C'. Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

a) Hãy nêu cách dựng các điểm $A'B'C'$.

b) Tìm tập hợp các điểm G khi M di động trong miền trong của tam giác ABC.

Bài 7

1. Cho mặt phẳng (P) và tứ diện $ABCD$. Với mỗi điểm M thuộc (P) ta xác định điểm N theo công thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$. Tìm tập hợp các điểm N khi M di động trong (P).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SA và (P) là mặt phẳng đối xứng của mặt phẳng (MBC) qua đường thẳng SA, H là hình chiếu vuông góc của S lên (P). Tìm tập hợp H khi M di động trên cạnh SA.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SA. Mặt phẳng (MCD) cắt SB tại N. Gọi M',N' lần lượt là điểm đối xứng của M,N qua mặt phẳng (SCD). Tìm tập hợp giao điểm E của hai đường thẳng DM' và CN' khi M di động trên cạnh SA.

4. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng d,d' chéo nhau cắt (P) lần lượt tại O và O'. Gọi (Q) là mặt phẳng xác định bởi d và đường thẳng d_1 song song với d' vẽ từ O.

Một đường thẳng Δ di động song song với (P) hay chứa trong (P), cắt d tại A, cắt d' tại A' và gọi M là điểm trên Δ sao cho $\overrightarrow{MA'}=k\overrightarrow{MA}$ (k là số thực cho trước và $k\neq 1$). Đường thẳng d_2 song song với OO' vẽ từ M, cắt mặt phẳng (Q) tại M'. Khi A di động trên d

a) Tìm tập hợp các điểm M'.

b) Tìm tập hợp các điểm M.

5. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A,B,C không nằm trong mặt phẳng song song với (P) và ở về cùng một bên đối với (P). Ba đường thẳng song song vẽ từ A,B,C cắt (P) lần lượt tại A',B',C'. Giả sử những đường thẳng song song ấy di động sao cho $AA'+BB'+CC'=k$, k là một độ dài không đổi.

a) Tìm tập hợp các điểm $A',B'C'$.

b) Tìm tập hợp trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$.

Vấn đề 2. PHÂN CHIA – LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN CHỨNG MINH HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU, CÁC BÀI TÓAN VỀ ĐA DIỆN ĐỀU

Phương pháp:

Để chứng minh hai đa diện bằng nhau, ta chứng minh có một phép biến hình trong không gian biến đa diện này thành đa diện kia.

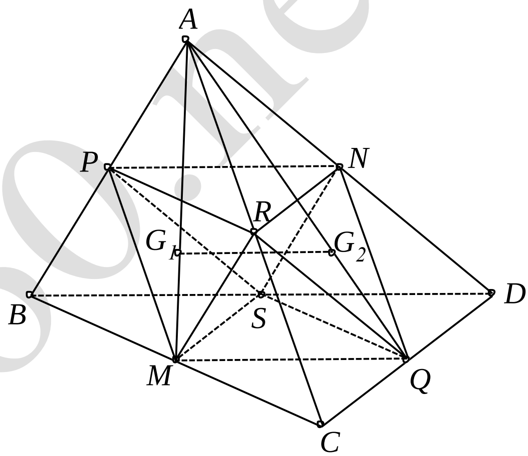
Ví dụ 1.2.1 Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng:

1. Trọng tâm các mặt của khối đó là các mặt của một tứ diện đều.

2. Các trung điểm các cạnh của khối đó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

Lời giải.

1. Gọi Q, M lần lượt là trung điểm của CD, CB; G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt $(ABC), (ACD), (ABD)$ và (BCD).



Gọi a là cạnh của tứ diện, ta có $G_1G_2 = \frac{2}{3}MQ = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$.

Tương tự $G_1G_4 = G_1G_3 = G_2G_3 = G_2G_4 = G_3G_4 = \frac{a}{3}$ nên $G_1G_2G_3G_4$ là một tứ diện đều cạnh $\frac{a}{3}$.

2. Gọi N, P, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AD, AB, AC, BD

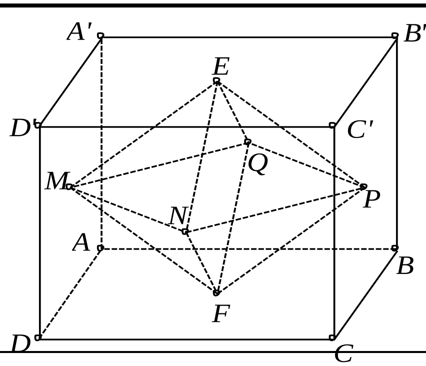
Theo tính chất đường trung bình, ta có:

$$QM = QN = QS = QR = PM = PN = PS = PR = \frac{a}{2}$$

Ví dụ 2.2.1 Chứng minh rằng tâm các mặt của hình lập phương là các đỉnh của một bát diện đều.

Lời giải.

Giả sử cạnh của hình lập phương đã cho là a. Gọi $M, N, P\ Q, E, F$ lần lượt là tâm các mặt của hình lập phương (hình vẽ).



Ta có $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ và tương tự cho các cạnh khác của hình gồm tám đỉnh M, N, P, Q, E, F.

Hay $MNPQEF$ là một bát diện đều.

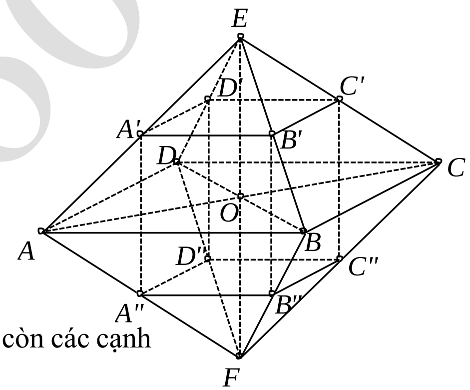
Ví dụ 3.2.1 Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh a, trong đó E, F là hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh. Gọi $A', B', C', D', A'', B'', C'', D''$ lần lượt là trung điểm các cạnh EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD. Chứng minh rằng $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là một hình hộp chữ nhật và tính các cạnh của hình chữ nhật đó.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a, nên các tứ giác $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$ là các hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$ và hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(A''B''C''D'')$ song song với nhau

Ta có $A'A'' // EF$ nên $A'A'' \perp (ABCD) \Rightarrow A'A'' \perp (A'B'C'D')$.

Tương tự suy ra các cạnh bên $A'A'', B'B'', C'C'', D'D''$ cùng vuông góc với hai mặt đáy. Vậy $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là hình hộp chữ nhật.



Các cạnh đáy của hình hộp có độ dài là $\frac{a}{2}$, còn các cạnh bên của hình hộp có độ dài là $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

CÁC BÀI TÓAN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Hãy phân chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành ba khối tứ diện.

2. Chia một khối hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành 5 khối tứ diện.

3. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng ta có thể nội tiếp khối tứ diện trong một khối hộp sao cho các cạnh của tứ diện là đường chéo các mặt của khối hộp.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh hai tứ diện $A'ABD$ và $CC'D'B'$ bằng nhau.

5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB. Chứng minh hai tứ diện $SABA'$ và $SBCB'$

Bài 2 Cho khối bát diện đều ABCDEF cạnh a, trong đó E, F là hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh. Gọi $A', B', C', D', A'', B'', C'', D''$ lần lượt là trung điểm các cạnh EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD. Chứng minh rằng $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là một hình hộp chữ nhật và tính các cạnh của hình chữ nhật đó

Bài 3

1. Hãy phân chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành

a) Ba khối tứ diện.

b) Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác

2. Hãy phân chia một khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành năm khối tứ diện

3. Cho hình chóp tứ giác $F.ABCD$ có đáy là hình vuông. Cạnh bên FC vuông góc với đáy và có độ dài bằng cạnh AB .Chứng minh rằng có thể dùng ba hình chóp như trên để ghép lại thàng một hình lập phương.

4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau.

b) Các lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau.

5. Hãy dùng 4 mặt phẳng để chia một khối tứ diện cho trước thành 9 khối tứ diện.

Bài 4

1. Cho khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh a, trong đó E, F là hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh. Gọi A', B', B', D', A'', B'', C'', D'' lần lượt là trung điểm các cạnh EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD. Chứng minh rằng: $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là một hình hộp chữ nhật và tính các cạnh của hình chữ nhật đó.

2. Cho khối tứ diện đều . Chứng minh rằng:

a) Trọng tâm các mặt của nó là các đỉnh của một tứ diện đều

b) Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

3. Cho khối bát diện đều $ABCDEF$. Chứng minh rằng:

a) Các điểm A, B, C, D nằm trên mặt phẳng trung trực của EF

b) $(ABCD) \perp (ECFA)$.

4. Chứng minh tâm các mặt của một hình bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.

5. Chứng minh rằng tâm các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình bát diện đều.

6. Chứng minh rằng tồn tại một khối đa diện có 20 mặt là tam giác đều nhưng không phải là khối hai mươi mặt đều.

Bài 5

1. Cho khối tứ diện đều $ABCD.$ Chứng minh rằng

a)Trọng tâm các mặt của khối đó là các mặt của một tứ diện đều.

b) Các trung điểm các cạnh của khối đó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

2. Chứng minh rằng tâm các mặt của một hình bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.