LÝ THUYẾT ĐẠO HÀM
TÓM TẮT GIÁO KHOA

1). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Giới hạn hữu hạn nếu có của tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi $x \to x_0$ được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Như vậy ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Nhận xét:

Nếu đặt $x - x_0 = \Delta x$ và $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ thì ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Trong đó Δx được gọi là số gia của biến số tại x_0 và Δy gọi là số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại x_0.

Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 thì f(x) liên tục tại x_0. Tuy nhiên điều ngược lại chưa chắc đúng.

2). Cho đường cong (C), điểm M_0 cố định thuộc (C) và $M \in (C)$. Gọi k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $k_0 = \lim\limits_{x_M \to x_0} k_M$. Khi đó đường thẳng M_0T qua M_0 có hệ số góc k_0 được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0. Điểm M_0 gọi là ***tiếp điểm.***

3). Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại đó tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Hệ quả:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ có phương trình: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

4). Khí hiệu D là một khoảng hay là hợp của những khoảng nào đó. Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại tại mọi điểm $x_0 \in D$ thì ta nói hàm số có đạo hàm trên D. Khi đó đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x tùy ý của D được kí hiệu y' hay $f'(x)$. Ta nói y' hay $f'(x)$ là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên tập D.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: Tìm số gia của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP

Để tính số gia của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng với số gia Δx cho trước ta áp dụng công thức: $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

Ví dụ 1: Tìm số gia của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, biết rằng:

a). $x_0 = 1;\ \Delta x = 1$ b). $x_0 = 1;\ \Delta x = -0,1$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = f(2) - f(1) = 2^3 - 3.2^2 + 2 - (1^3 - 3.1^2 + 2) = -2$

b). Ta có $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = f(0,9) - f(1)$

$= 0,9^3 - 3.0,9^2 + 2 - (1^3 - 3.1^2 + 2) = 0,229$

Ví dụ 2: Tính Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và Δx

a). $y = 2x + 3$ b). $y = 2x^2 - 3x + 1$ c). $y = \sqrt{2x^2+1}$ d). $y = 2x^3 - 3x^2$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\Delta y = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = 2\left(x_o + \Delta x\right) + 3 - \left(2x_0 + 3\right) = 2\Delta$. Suy ra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

b). Ta có $\Delta y = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = 2\left(x_o + \Delta x\right)^2 - 3\left(x_o + \Delta x\right) + 1 - \left(2x_0^2 - 3x_0 + 1\right)$

$$= 4x_0\Delta x + 2\left(\Delta x\right)^2 - 3\Delta x = \Delta x\left(4x_0 + 2\Delta x - 3\right).$$

Suy ra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x\left(4x_0 + 2\Delta x - 3\right)}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x - 3$.

c). Ta có $\Delta y = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = \sqrt{2\left(x_o + \Delta x\right)^2 + 1} - \sqrt{2x_0^2 + 1}$

$$= \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\sqrt{2\left(x_o + \Delta x\right)^2 + 1} + \sqrt{2x_0^2 + 1}}.$$

Suy ra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x\left(\sqrt{2\left(x_o + \Delta x\right)^2 + 1} + \sqrt{2x_0^2 + 1}\right)} = \dfrac{2x_0 + \Delta x}{\sqrt{2\left(x_o + \Delta x\right)^2 + 1} + \sqrt{2x_0^2 + 1}}$.

d). Ta có $\Delta y = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = 2\left(x_o + \Delta x\right)^3 - 3\left(x_o + \Delta x\right)^2 - \left(2x_0^3 - 3x_0^2\right)$

$$= 2\left(x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) - 3\left(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) - \left(2x_0^3 - 3x_0^2\right)$$

$$= \Delta x\left(6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x_0 - 3\Delta x\right)$$

Suy ra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x\left(6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x_0 - 3\Delta x\right)}{\Delta x}$

$$= 6x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6x_0 - 3\Delta x.$$

DẠNG 2: Tìm đạo hàm bằng định nghĩa

PHƯƠNG PHÁP

Để tìm đạo hàm của hàm số $y = f\left(x\right)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa ta có thể sử dụng một trong hai cách sau đây:

Cách 1:

- Cho x_0 một số gia $\Delta x = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$. Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- Kết luận:

+ Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số có đaọ hàm là: $f'\left(x_0\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

+ Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ không tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số không có đạo hàm.

Cách 2:

- Tính giá trị của $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}$.
- Kết luận:

+ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tồn tại hữu hạn bằng L thì tại x_0, ta có $f'(x_0)=L$

+ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ không tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số không có đạo hàm.

Ví dụ : Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a). $y=2x^2+x+1$ tại $x_0=2$ b). $y=x^3+x-2$ tại $x_0=-2$

c). $y=\sqrt{2x+1}$ tại $x_0=1$ d). $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại $x_0=3$

LỜI GIẢI

a). Cách 1: Cho $x_0=2$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=2(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)+1-(2.2^2+2+1)=\Delta x(9+2\Delta x)$$

Ta có $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(9+2\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(9+2\Delta x)=9$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x+1-11}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x+5)=9$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0=2$ và $f'(2)=9$.

b). $y=x^3+x-2$ tại $x_0=-2$

Cách 1: Cho $x_0=-2$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y=f(-2+\Delta x)-f(-2)=(-2+\Delta x)^3+(-2+\Delta x)-1+12=13\Delta x-6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

$$=\Delta x\left(13-6\Delta x+(\Delta x)^2\right)$$

Ta có $f'(-2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\left(13-6\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(13-6\Delta x+(\Delta x)^2\right)=13$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x-2+12}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x+10}{x+2}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+5)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x^2-2x+5)=13$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0=-2$ và $f'(-2)=13$.

c). $y=\sqrt{2x+1}$ tại $x_0=1$

Cách 1: Cho $x_0=1$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1+\Delta x)-f(1)=\sqrt{2(1+\Delta x)+1}-\sqrt{3}=\frac{2\Delta x}{\sqrt{3+2\Delta x}+\sqrt{3}}$$

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3+2\Delta x}+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{3+2\Delta x}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}\right)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0=1$ và $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

d). $y=\frac{2x-1}{x+1}$ tại $x_0=3$

Cách 1: Cho $x_0=3$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(3+\Delta x)-f(3)=\frac{2(3+\Delta x)-1}{3+\Delta x+1}-\frac{5}{4}=\frac{5+2\Delta x}{4+\Delta x}-\frac{5}{4}=\frac{3\Delta x}{4(4+\Delta x)}$$

Ta có $f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x.4(4+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3}{4(4+\Delta x)}=\frac{3}{16}$.

Cách 2: $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2x-1}{x+1}-\frac{5}{4}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)}{(x-3)(x+1)4}=\lim_{x\to 3}\frac{3}{(x+1)4}=\frac{3}{16}$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0=3$ và $f'(3)=\frac{3}{16}$.

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM
TÓM TẮT GIÁO KHOA

1). Định lý 1: Cho các hàm số $u=u(x), v=v(x)$ có đạo hàm trên (a;b) thì tổng và hiệu của chúng cũng có đạo hàm trên khoảng (a;b) và

$(u+v)'=u'+v';\ (u-v)'=u'-v'$

Chú ý: Định lý 1 có thể mở rộng cho tổng hay hiệu của hữu hạn các hàm số.

2). Định lý 2: Cho các hàm số $u=u(x), v=v(x)$ có đạo hàm trên (a;b) thì tích của chúng cũng có đạo hàm trên khoảng (a;b) và $(u.v)'=u'v+uv'$.

Đặc biệt : $(a.u)'=a.u'$ (a là hằng số),

Chú ý: Định lý 2 có thể mở rộng cho tích của hữu hạn các hàm số. Chẳng hạn:

$(u.v.w)'=u'vw+uv'w+uvw'$

3). Định lý 3: Cho các hàm số $u=u(x), v=v(x)$ có đạo hàm trên (a;b) và $v(x)\neq 0$ trên (a;b) thì thương $\frac{u}{v}$ cũng có đạo hàm trên khoảng (a;b) và

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Hệ quả: $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}(v\neq 0)$.

4). Cho hai hàm số $y=f(u)$ và $u=g(x)$. Ta gọi hàm số $y=F(x)=f[g(x)]$ là hàm số hợp của hai hàm số $u=g(x)$ và $y=f(u)$. Tập xác định của hàm số $f[g(x)]$ là tập hợp tất cả các giá trị của x làm cho biểu thức $f[g(x)]$ có nghĩa.

5). Định lý 4: Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0 = u(x_0)$ thì hàm số hợp $y = F(x) = f\left[u(x)\right]$ cũng có đạo hàm tại điểm x_0 và $F'(x_0) = f'(u_0).u(x_0)$ hay $y'_x = y'_u.u'_x$.

Hệ quả: $\left(u^n\right)' = n.u^{n-1}.u'(n \in N$ và $n \geq 2)$; $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'$

QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Giả sử $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm, khi đó:

1). $(u + u - w)' = u' + v' - w'$; **2).** $(uv)' = u'v + v'u$; **3)** $(k.u)' = k.u'$ $(k \in R)$

4). $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ **5).** $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

BẢNG ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản	**Đạo hàm của hàm số hợp (u = u(x))**
$(C)' = 0$	
$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \left(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0\right)$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}, \left(x \neq 0\right)$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u', \left(\alpha \in \mathbb{R}, u > 0\right)$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u > 0)$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $(u \neq 0)$ $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n}{u^{n+1}}.u', \left(u \neq 0\right)$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$ $\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$ $(x \neq k\pi, k \in Z)$.	$(\sin u)' = \cos u.u'$ $(\cos u)' = -\sin u.u'$ $\left(\tan u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = \left(1 + \tan^2 u\right)u'$ $(u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$ $\left(\cot u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -\left(1 + \cot^2 u\right)u'$ $(u \neq k\pi, k \in Z)$.

MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM NHANH

- $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \dfrac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$
- $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \dfrac{(ae-bd)x^2+2(af-dc)x+bf-ec}{(dx^2+ex+f)^2}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP